Egzamin domowy z Miar i Procesów Gaussowskich

25 stycznia - 8 lutego 2005

Do zaliczenia egzaminu należy wybrać i rozwiązać 9 zadań, przy czym podpunkty/zadania oznaczone symbolem * liczą się jak dwa dodatkowe zadania. W rozwiązaniach można korzystać z wszystkich faktów udowodnionych na wykładzie lub ćwiczeniach. Rozwiązania zadań należy oddać do 8 lutego 2005 (wtorek) godzina 18.00.

W zadaniach poniższych g_n oznaczają niezależne zmienne losowe o rozkładzie $\mathcal{N}(0,1)$. Ponadto $I(x) = \varphi(\Phi^{-1})$ jest gaussowską funkcją izoperymetryczną, a literą K oznaczamy stałe, które nie zależą od żadnych parametrów.

1. Wykaż, że $\mathbb{E}\sup_{n\geqslant 1}\frac{|g_n|}{\sqrt{\ln(n+1)}} < \infty$ oraz jeśli $\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\sqrt{\ln n}} = 0$, to $\sup_n \frac{|g_n|}{c_n} = \infty$ p.n..

2. Udowodnij, że
$$I(t) = t\sqrt{2\ln\frac{1}{t} - \ln\ln\frac{1}{t} - \ln 4\pi} + o(t(\ln\frac{1}{t})^{-1/2}) \text{ przy } t \to 0+$$
i wywnioskuj stąd, że dla $0 \leqslant a < \infty$, $I(at) = aI(t) + at(\log\frac{1}{a})(2\ln\frac{1}{t})^{-1/2} + f_a(t)$, gdzie $\sup_{0<a\leqslant A} f_a(t) = o(t(\ln\frac{1}{t})^{-1/2})$ przy $t \to 0+$.

3. Niech C będzie ustaloną macierzą $n\times n$ symetryczną, odwracalną, a μ_C miarą gaussowską na $\mathbb{R}^n$ o macierzy kowariancji C^{-1}. Określmy dla $t \geqslant 0$, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $T_t^C f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ wzorem
$$T_t^C f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-tC}x + \sqrt{I - e^{-2tC}}y)d\mu_C(y).$$
Wykaż, że
i) $T_t\colon L^p(\mu_C) \to L^p(\mu_C)$ oraz $\|T_t^C f\|_p \leqslant \|f\|_p$. Wykaż, że operatory T_t^C są nieujemne i symetryczne (tzn. $\int (T_t^C f) g d\mu_C = \int f(T_t^C g)d\mu_C$).
ii) Wykaż, że $(T_t^C)_{t\geqslant 0}$ jest półgrupą mocno ciągłą (tzn. $\|T_t^C f - f\| \to 0$, jeśli $t \to 0+$) na $L^p(d\mu_C)$. Ponadto dla $f \in L^p(d\mu_C)$, $\|T_t^C f - \int f d\mu_C\|_p \to 0$ przy $t \to \infty$.

4. Przy oznaczeniach poprzedniego zadania niech L_C będzie generatorem T_t^C na $L^2(d\mu_C)$.
i) Niech $C^\infty_{\text{ogr}}(\mathbb{R}^n)$ oznacza te funkcje $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ dla których wszystkie pochodne są ograniczone (tzn. dla wszystkich $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\|D_\alpha f\|_\infty < \infty$).

Wykaż, że $C^\infty_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n) \subset D(L_C)$ oraz $L_C f := \triangle f - \langle Cx, \nabla f\rangle$ dla $f \in C^\infty_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n)$.
ii) Wykaż, że jeśli $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, to $T_t f \in C^\infty_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R}^n)$ dla $t > 0$.

5. Dla zbioru wypukłego $K \subset \mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu określamy $\gamma_K(A) := \gamma_n(K \cap A)/\gamma_n(K)$. Wykaż, że γ_K spełnia nierówność Bobkowa i nierówność logarytmiczną Sobolewa ze stałą 1.

6. Niech (g_{ij}) będzie podwójnie indeksowanym ciągiem niezależnych zmiennych losowych $\mathcal{N}(0,1)$. Dla macierzy $(a_{ij})_{i,j\leqslant n}$ określamy normę operatorową wzorem
$$\|(a_{ij})_{i,j\leqslant n}\| := \sup\{\sum_{i,j\leqslant n} a_{ij}x_iy_j \colon \sum_{i=1}^n x_i^2 \leqslant 1, \sum_{j=1}^n y_j^2 \leqslant 1\}.$$
a) Wykaż, że $n^{-1/2}\|(g_{ij})_{i,j\leqslant n}\| - n^{-1/2}\mathbb{E}\|(g_{ij})_{i,j\leqslant n}\| \to 0$ prawie na pewno przy $n \to \infty$.
b*) Udowodnij, że $n^{-1/2}\mathbb{E}\|(g_{ij})_{i,j\leqslant n}\| \to 2$ przy $n \to \infty$.

7. Dla $1 \leqslant p < \infty$ oraz macierzy $(a_{ij})_{i,j\leqslant n}$ określmy
$$\|(a_{ij})_{i,j\leqslant n}\|_{l^p\to l^p} := \sup\{(\sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^n g_{ij}x_i|^p)^{1/p} \colon \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leqslant 1\}.$$
Wykaż, że dla $1 \leqslant p < \infty$ istnieje stała $K(p)$ zależna tylko od p taka, że
$$\frac{1}{K(p)}\max(n^{1/p}, n^{1-1/p}) \leqslant \mathbb{E}\|(g_{ij})_{i,j\leqslant n}\|_{l^p\to l^p} \leqslant K(p)\max(n^{1/p}, n^{1-1/p}).$$

8. a) Wykaż, że jeśli T jest zbiorem skończonym lub przeliczalnym, a $(X_t)_{t\in T}$ jest procesem gaussowskim o średniej zero, to
$$\mathbb{P}(\sup_{t\in T}|X_t| \leqslant 1) \geqslant \prod_{t\in T}\mathbb{P}(|X_t| \leqslant 1).$$
b) Udowodnij, że jeśli $A = [-a_1, a_1] \times \ldots \times [-a_n, a_n]$, to $\gamma_n(A \cap K) \geqslant \gamma_n(A)\gamma_n(K)$ dla dowolnego wypukłego symetrycznego zbioru K.

9.* Wykaż, że dla dowolnej scentrowanej miary gaussowskiej μ na ośrodkowej przestrzeni Banacha E oraz zwartych, wypukłych, symetrycznych zbiorów K, L w E zachodzi dla $0 < \lambda < 1$
$$\mu(K \cap L) \geqslant \mu(K \cap L)\mu(\lambda^2 K + (1-\lambda^2)L) \geqslant \mu(\lambda K)\mu((1-\lambda^2)^{1/2}L).$$

10. Wykaż, że jeśli $(X_t)_{t\in T}$ jest scentrowanym procesem gaussowskim oraz $T = \bigcup_{i=1}^N T_i$, to

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant \max_i \mathbb{E}\sup_{t\in T_i} X_t + K\sqrt{\log N}\sup_{t\in T}(\mathbb{E}X_t^2)^{1/2}.$$

11. Udowodnij, że dla dowolnego scentrowanego procesu gaussowskiego $(X_t)_{t\in T}$ oraz $u > 0$

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t \leqslant \sup_{s\in T}\mathbb{E}\sup_{t\in T: d_X(t,s)\leqslant u} X_s + K\int_u^{\Delta(T)}\sqrt{\log N(T, d_X, r)}dr + Ku\sqrt{\log N(T, d_X, u)},$$

gdzie $d_X(s,t) := (\mathbb{E}|X_t - X_s|^2)^{1/2}$ oraz $\Delta(T) := \sup\{d_X(s,t) \colon s, t \in T\}$.

12. a) Skonstruuj scentrowany proces gaussowski $(X_t)_{t\in T}$ dla którego

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} X_t < \infty \quad \text{oraz} \quad \int_0^\infty \sqrt{\log N(T, d_X, u)}du = \infty,$$

konstrukcję uzasadnij.
b*) Wykaż, że jeśli $(X_t)_{t\in[0,1]}$ jest stacjonarnym, scentrowanym procesem gaussowskim to

$$\int_0^\infty \sqrt{\log N([0,1], d_X, u)}du \leqslant K\mathbb{E}\sup_{t\in[0,1]} X_t.$$