Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 1

1. Które z poniższych przestrzeni metrycznych są przestrzeniami unormowanymi?
   a) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = \mathrm{arctg}|x - y|$;
   b) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \max_{i \geqslant 3} |x_i - y_i|$;
   c) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$;
   d) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$;
   e) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$;
   f) $X = C^1[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)| + \sup_x |f'(x) - g'(x)|$.

2. Które z przestrzeni z poprzedniego zadania są zupełne?

3. Naszkicuj kulę jednostkową w następujących przestrzeniach: $l^2_1, l^2_2, l^2_\infty, l^2_p, l^3_1, l^3_2, l^3_\infty$.

4. Powiemy, że dwie metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne, jeśli definiują takie same topologie (czyli ciągi mają w obu metrykach te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że
$$\forall_{x,y}\ c\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant C\rho_1(x, y), \tag{1}$$
   to metryki są równoważne.

5. Wskaż dwie równoważne metryki, które nie spełniają (1).

6. Mówimy, że dwie normy są równoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są równoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ dla wszystkich x.

7. Wskaż dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

8* Wykaż, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

9* Czy istnieje przestrzeń X i dwie nierównoważne normy wprowadzające na X strukturę przestrzeni Banacha?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 2

1. Wykaż, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.

2. Niech A będzie gwiaździstym względem zera, pochłaniającym podzbiorem przestrzeni liniowej X, którego przecięcia z każdą prostą są domknięte. Określmy $p_A(x) := \inf\{t > 0 \colon x/t \in A\}$. Kiedy p_A jest normą na X?

3. Niech $(X, \|\cdot\|)$ będzie przestrzenią unormowaną, wykaż, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X.

4. Wykaż, że jeśli zbiór A jest wypukłym podzbiorem przestrzeni unormowanej, to zbiory $\mathrm{cl}(A) = \bar{A}$ i $\mathrm{int}(A)$ też są wypukłe.

5. Dla zbioru A w przestrzeni liniowej X określamy
$$\mathrm{conv}(A) := \bigcap\{B \colon B \text{ wypukłe}, \ A \subset B\}.$$
Wykaż, że
a) $\mathrm{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A.
b) $\mathrm{conv}(A) := \{x = \sum_{j=1}^n \lambda_j a_j \colon a_j \in A, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \ n = 1, 2, \ldots\}$.

6. Niech $\varphi \colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie funkcją wypukłą taką, że $\varphi(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy gdy $x = 0$. Określamy
$$l_\varphi := \{x = (x_n)_{n=1}^\infty \colon \exists t > 0 \ \sum_n \varphi(|x_n|/t) < \infty\}$$
oraz
$$\|x\|_\varphi := \inf\{t > 0 \colon \sum_n \varphi(|x_n|/t) \leqslant 1\} \text{ dla } x \in l_\varphi.$$
Wykaż, że l_φ z normą $\|x\|_\varphi$ jest przestrzenią Banacha.

7. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykaż, że
a) $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$ dla $1 \leqslant p < q$.
b) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w l_p^n wynikają z a)?

8. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leqslant p < q$.
a) Wykaż, że $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$
b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
c) Czy zawsze $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?

9. Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^\infty \colon \sum_{i=1}^\infty |x_i| \leqslant 1\}$ jest domkniętym wypukłym podzbiorem l_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?

10. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X. Udowodnij, że dla $1 \leqslant p < q$,

a) $\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi równość?

b) Znajdź funkcję $f \in L_p[0,1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.

c) Znajdź funkcję $f \in L_q[0,\infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 3

1. Oblicz normę $\mathrm{id}\colon l_p^n \to l_q^n$ dla $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

2. Określamy $T\colon l_1 \to c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Wykaż, że T jest ciągłe i oblicz jego normę.

3. Znajdź normę przekształcenia $f(x) \to xf(x)$ z $L_p[-1,1]$ w $L_1[-1,1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4. Niech $g \in L_\infty(X,\mu)$ wykaż, że przekształcenie T dane wzorem $Tf(x) := g(x)f(x)$ jest ciągłym operatorem na $L_p(X,\mu)$. Ile wynosi jego norma?

5. Niech $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$, wykaż, że T jest ciągłym przekształceniem z $L_p[0,1]$ w $L_q[0,1]$ dla dowolnych $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

6. Wykaż, że $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funcjonałem na $C[0,1]$ i policz jego normę.

7. Niech $X := \{f \in C[0,1]\colon f(t) = 2f(1-t), t \in [0,1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnij, że następujące funcjonały są ciągłe na X i policz ich normy:
   a) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx$,
   b) $\varphi(f) := f(\frac{1}{4})$,
   c) $\varphi(f) := f(\frac{3}{4})$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 4

1. Zbadaj ciągłość i oblicz normę przekształcenia $T\colon L_p[0,1] \to L_p[0,1]$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x})$.

2. Na przestrzeni $C^k[0,1]$, $k \geqslant 1$ definiujemy normę $\max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in[0,1]} |f^{(i)}(t)|$. Udowodnij ciągłość i oblicz normę następujących funkcjonałów na $C^k[0,1]$:
   a) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(t)dt$,
   b) $\varphi(f) := f'(1/2)$,
   c) $\varphi(f) = f(1) - f(0)$.

3. Niech $M := \{f \in C[0,1]\colon \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_{1/2}^1 f(t)dt\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$. Niech $g(t) = t$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$?

4. $M := \{f \in L_1[0,1]\colon \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L_1[0,1]$. Niech $g \equiv 1$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?

5. Niech $M := \{f \in L_2[-1,1]\colon f(x) = f(-x)\} \subset L_2[-1,1]$ Znajdź $M^\perp$ i rzut ortogonalny na M..

6. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2[0,1]$ składającą się z funkcji stałych na $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 1, \ldots, n$.
   a) Znajdź $V_n^\perp$
   b) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n.
   c) Znajdź odległość $f(t) = t$ w $L_2[0,1]$ od V_n.

7* Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ jest zadana przez iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ dla wszystkich x, y.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 5

1. Wykaż, że każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest domknięta.

2. Załóżmy że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ są dwoma σ-ciałami podzbiorów X, a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że
i) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
ii) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
iii) P_M jest nieujemny tzn. $P_M f \geqslant 0$ μ-p.n., jeśli $f \geqslant 0$ μ-p.n..

3. Znajdź ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w $L^2[-1,1]$.

4. Znajdź wielomian stopnia 2 taki, że $\int_{-1}^{1} |t^4 - w(t)|^2 dt$ jest najmniejszy.

5. Wykaż, że układ Rademachera $f_n := \operatorname{sgn}(\sin(2^n \pi x))$, $n = 1, 2, \ldots$ jest układem ortogonalnym w $L^2[0,1]$. Czy jest to układ zupełny?

6. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a
$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad t \in [-1, 1], \ n \geqslant 0.$$
a) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L^2[-1,1]$. Jak go trzeba znormalnizować by był ortonormalny?
b) Czy jest to układ zupełny?

7. Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a
$$L_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}), \quad t \geqslant 0, \ n \geqslant 0.$$
a) Wykaż, że L_n jest układem ortogonalnym w $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t} dt)$. Czy jest on ortonormalny?
b*) Czy jest to układ zupełny?

8. Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a
$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}} e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2/2}).$$
a) Wykaż, że $(H_n)_{n \geqslant 0}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt)$.
b*) Czy jest to układ zupełny?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 6

1. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi,\pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$, przy czym ciąg jest zbieżny w L^2. Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$?

2. Jak wygląda odpowiednie rozwinięcie w szereg Fouriera dla funkcji nieparzystych?

3. Niech $r_k := \operatorname{sgn}(\sin 2^k \pi x)$, $k=1,2,\ldots$ będzie układem Rademachera (zob. zad. 5 z poprzedniej serii). Dla skónnczonych niepustych zbiorów $A \subset \{1,2,\ldots\}$ określamy $w_A := \prod_{k\in A} r_k$ oraz kładziemy $w_\emptyset := 1$. Wykaż, że $(w_A)_A$ jest bazą o.n. $L^2[0,1]$.

4. Niech μ będzie miarą skończoną na $[0,1]$, która nie jest skupiona na zbiorze skończonym. Wykaż, że istnieje baza o.n. $(f_n)_{n\geqslant 0}$ przestrzeni $L^2([0,1],\mu)$ taka, że f_n jest wielomianem stopnia n.

5. Niech $(f_i(x))_i$ i $(g_j(y))_j$ będą układami ortonormalnymi w $L^2(X,\mu_1)$ i $L^2(Y,\mu_2)$ odpowiednio. Wykaż, że
a) układ $(f_i(x)g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(X\times Y,\mu_1\mu_2)$.
b) jeśli układy $(f_i)_i,(g_j)_j$ są zupełne, to układ $(f_i g_j)_{ij}$ też jest zupełny.

6. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykaż, że
a) każdą bazę o.n. M da się rozszerzyć do bazy o.n. $\mathcal{H}$,
b) jeśli $(u_i)_{i\in I}$ jest bazą M, to rzut ortogonalny na M ma postać
$$P_M x = \sum_{i\in I} \langle x, u_i\rangle u_i.$$

7. Wykaż, że przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^n)$ jest ośrodkowa i wywnioskuj stąd ośrodkowość przestrzeni $L_2(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A\subset\mathbb{R}^n$. Czy przestrzenie $L_2(A)$ i $L_2(B)$ są izometryczne?

8. Dla jakich p przestrzenie l_p są ośrodkowe?

9. Wyznacz p dla których $L_p[0,1]$ jest ośrodkowa.

10. Czy przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa? A przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych na $(0,1)$ z normą supremum?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 7

1. Wykaż, że przestrzeń unormowana X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy ma przeliczalny podzbiór liniowo gęsty.

2. Wykaż, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$ to istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.

3. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. Wykaż, że dla dowolnego $x \in X$,

$$\operatorname{dist}(x, F) = \sup\{|x^*(x)| \colon x^* \in X^*, \|x^*\| \leqslant 1, x^*|F = 0\}$$

4. Wykaż, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

5. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami rzeczywistej przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykaż, że istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x\in A} \varphi(x) < \inf_{x\in B} \varphi(x)$

6. Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\Delta(x) := \{x^* \in X^* \colon x^*(x) = 1 = \|x^*\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.

7. Podaj przykłady $x \in l_1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n-wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.

8. Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

9. Przestrzeń $C[0, 1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty[0, 1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0, 1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L_\infty[0, 1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L_1[0, 1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnij, że jeśli $f \in L_\infty[0, 1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

10. Jaka jest norma funkcjonału $\varphi(f) := \int_0^1 e^x f(x)dx$ na $L_p(0, 2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$?

11. Dla jakich p z przedziału $[1, \infty]$ wzór $\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/3} x_n$ zadaje ciągły funkcjonał na l_p?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 8

1. Niech μ będzie skończoną nieujemną miarą borelowską na $[0,1]$. Wykaż, że funkcjonał dany wzorem $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)d\mu(x)$ jest ciągły na $C[0,1]$ i policz jego normę.

2. Dla $x \in [0,1]$, niech $\delta_x(f) = f(x)$. Udowodnij, że
a) δ_x jest ciągłym liniowym funkcjonałem na $C[0,1]$ o normie 1.
b) Jeśli $(x_n)_{n=1}^N$ jest skończonym ciągiem różnych punktów z $[0,1]$, to dla dowolnych liczb a_n,
$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} a_n \delta_{x_n} \Big\|_{C[0,1]^*} = \sum_{n=1}^{N} |a_n|.$$
c) Wykaż, że b) zachodzi dla $N = \infty$ (przy założeniu $\sum_n |a_n| < \infty$).

3. Wykaż, że dla $f \in L^1[0,1]$ funkcjonał φ_f na $C[0,1]$ zadany wzorem $\varphi_f(g) := \int_0^1 f(t)g(t)$ jest ciągły oraz $\|\varphi_f\| = \|f\|_1$.

4. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in l_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.

5. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wted515294956y i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$.

6. Załóżmy, że $f_n \in L_2[0,1]$ są takie, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L_2[0,1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 9

1. Wykaż, że w przestrzeni skończonego wymiaru zbieżność w normie i słaba są równoważne.

2. Wykaż, że ciąg wektorów $x_n = (x_{n,k})_{k=1}^{\infty}$ zbiega do słabo do zera w l_p, $1 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_{n,k} = 0$ dla wszystkich k. Czy charakteryzacja ta jest prawdziwa dla l_1? A dla c_0?

3. Wykaż, że jeśli $1 < p < \infty$ oraz $f_n \in L_p[0,1]$ są takie, że $\|f_n\|_p \leqslant 1$ i $\lambda_1(\{x\colon f_n(x) \neq 0\}) \to 0$, to f_n zbiegają słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?

4. Wykaż, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \operatorname{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L_p[0,1]$ dla $1 \leqslant p < \infty$.

5* Czy r_k zbiega słabo do zera w L_∞?

6* Czy w każdej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru istnieje ciąg słabo zbieżny do zera, który nie zbiega do zera w normie?

7. Wykaż, że jeśli ciąg wektorów x_n zbiega słabo do zera, to istnieje ciąg kombinacji wypukłych wektorów x_n zbieżny do zera w normie.

8. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciąglym funkcjonałem na X.

9. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Wykaż, że przekształcenie liniowe $T\colon X \to C[0,1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $t \in [0,1]$, $x \to Tx(t)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

10. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) =: (P_1x, P_2y) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y.

11. Załóżmy, że X, Y i Z są przestrzeniami Banacha, zaś $B\colon X \to Z$ oraz $C\colon Y \to Z$ są ciagłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 10

1. Niech $(e_n)_{n\geqslant 0}$ będzie kanoniczną bazą l_p. Wykaż, że operator liniowy $T\colon l_p \to l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. Czy operator „przesunięcia w prawo" na l_p jest zwarty?

3. Niech $T\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$. Czy jest to operator zwarty?

4. Określmy $T\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

5. Wykaż, że $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $T(B_X)$ da się pokryć skończoną liczbą kulek w Y o promieniu ε.

6. Wykaż, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń $Y_\varepsilon \subset Y$ taka, że $\dim Y_\varepsilon < \infty$ oraz $\operatorname{dist}(T(B_X), Y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

7. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią Banacha $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T \in B(X, l_p)$ jest zwarty, to istnieje ciąg skończenie wymiarowych operatorów T_n taki, że $\|T_n - T\| \to 0$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 11

1. Niech $T\colon l_p \to l_p$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Jak wygląda T^*?

2. Niech $T\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie określony jako $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$. Znajdź T^*.

3. Określmy $T\colon l_1 \to c_0$ jako
$$T((x_n)_{n\geqslant 1}) := \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)_{n\geqslant 1}.$$
Znajdź T^*.

4. Wykaż, że operator T na $L_2[0,1]$ dany wzorem $Tf(x) = xf(x)$ jest samosprzężony i nie ma wartości własnych.

5. Niech $Tx = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Wykaż, że T jest zwartym operatorem na l_2 nie posiadającym wartości własnych. Jak wygląda T^*?

6. Niech $T\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ będzie postaci $Tf = gf$ dla pewnego $g \in L_\infty(\mathbb{R})$. Dla jakich g
a) T jest samosprzężony,
b) T jest unitarny,
c) λ jest wartością własną T?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 12

1. Znajdź spektrum operatora T zadanego wzorem $Tf = fg$ na $L_2(\mathbb{R})$. Jak wygląda rezolwenta tego operatora?

2. Wyznacz spektrum i rezolwentę operatora przesunięcia w lewo i w prawo na l_2.

3. Niech T na l_2 będzie zadany wzorem $Tx = (a_n x_n)_n$ dla pewnego ciągu ograniczonego a_n. Jak wygląda spektrum T?

4. Niech P będzie rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wyznacz spektrum T.

5. Wykaż, że dla dowolnego niepustego, zwartego podzbioru K płaszczyzny zespolonej istnieje operator T na pewnej przestrzeni Hilberta, którego spektrum jest równe K.

6. Niech T będzie operatorem zwartym na przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wykaż, że istnieją układy ortonormalne $(x_n)_{n=0}^N$ i $(y_n)_{n=0}^N$ oraz liczby dodatnie λ_n takie, że $Tx = \sum_{n=1}^N \lambda_n \langle x, x_n \rangle y_n$. Ponadto $\lambda_n \to 0$ jeśli $N = \infty$.

7. Wykaż, że jeśli T jest samosprzężony, to
   a) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$
   b) do $\sigma(T)$ należy $\|T\|$ lub $-\|T\|$.