Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 1

1. Które z poniższych przestrzeni metrycznych są przestrzeniami unormowanymi?
   . a) $X = \mathbb{R}$, $\|x\| = \mathrm{arctg}|x|$;
   b) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \max_{i \geqslant 3} |x_i - y_i|$;
   c) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$;
   d) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = |f(0) - g(0)|$;
   e) $X = C[0, 1]$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx$;

2. Które z przestrzeni z poprzedniego zadania są zupełne?

3. Narysuj kulki jednostkowe w następujących przestrzeniach: $l_1^2, l_2^2, l_\infty^2, l_p^2, l_1^3, l_2^3, l_\infty^3$.

4. Powiemy, że dwie metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne, jeśli definiują takie same topologie (czyli ciągi mają w obu metrykach te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że

   $$\forall_{x,y}\ c\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant C\rho_1(x, y), \tag{1}$$

   to metryki są równoważne.

5. Wskaż dwie równoważne metryki, które nie spełniają (1).

6. Mówimy, że dwie normy są równoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są równoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ dla wszystkich x.

7. * Wykaż, że wszystkie metryki na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 2

1. Wskaż dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

   Dla niepustych zbiorów A, B w przestrzeni liniowej X oraz $\lambda \in \mathbb{R}$ definiujemy $A + B = \{x + y \colon x \in A, y \in B\}$ oraz $\lambda A = \{\lambda x \colon x \in A\}$.

2. Wykaż, że jeśli zbiór A jest wypukły, to $aA+bA = (a+b)A$ dla dowolnych $a, b \geqslant 0$.

3. Wykaż, że zbiór A jest wypukły wtedy i tylko wtedy gdy $tA+(1-t)A = A$ dla dowolnego $0 \leqslant t \leqslant 1$.

4. Wykaż, że jeśli zbiory A i B są wypukłe, to $A + B$ też. Wskaż przykład niewypukłych zbiorów A i B takich, że $A + B$ jest wypukłe.

5. Wykaż, że jeśli zbiór A jest otwarty, to $A + B$ jest otwarty, a jeśli A i B są zwarte, to $A + B$ jest zwarty.

6. Wykaż, że w przestrzeni unormowanej $B(x, r_1) + B(y, r_2) = B(x + y, r_1 + r_2)$.

7. Wykaż, że każda kula w przestrzeni unormowanej jest wypukła.

8. Niech $(X, \| \cdot \|)$ będzie przestrzenią unormowaną, wykaż, że $f(x) = \|x\|$ jest funkcją ciągłą na X.

9. Niech A będzie gwiaździstym względem zera i pochłaniającym podzbiorem przestrzeni liniowej X. Określmy $p_A(x) := \inf\{t > 0 \colon x/t \in A\}$. Kiedy p_A jest normą na X?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 3

1. Wykaż, że jeśli zbiór A jest wypukły, to zbiór $\bar{A}$ też jest wypukły.

2. Dla zbioru A w przestrzeni liniowej X określamy

$$\operatorname{conv}(A) := \bigcap\{B\colon B \text{ wypukłe, } A \subset B\}.$$

   Wykaż, że
   a) $\operatorname{conv}(A)$ jest najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym A.
   b) $\operatorname{conv}(A) := \{x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j a_j\colon a_j \in A, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ n = 1, 2, \ldots\}$.

3. Niech $x = (x_k)_{k=1}^{n}$. Wykaż, że
   a) $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$ dla $1 \leqslant p < q$.
   b) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
   c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w l_p^n wynikają z a)?

4. Niech $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ oraz $1 \leqslant p < q$.
   a) Wykaż, że $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$
   b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_q = \infty$ oraz $\|x\|_p < \infty$.
   c) Czy zawsze $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?

5. Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^{\infty}\colon \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| \leqslant 1\}$ jest domkniętym wypukłym podzbiorem l^2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?

6. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X. Udowodnij, że dla $1 \leqslant p < q$,
   a) $\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi równość?
   b) Znajdź funkcję $f \in L^p[0,1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.
   c) Znajdź funkcję $f \in L^q[0,\infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.

7. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania określamy

$$\|f\|_\infty = \operatorname{esssup}|f| = \inf\{t > 0\colon \mu(\{x\colon f(x) > \lambda\}) = 0\}.$$

   Wykaż, że jeśli $\mu(X) < \infty$, to $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

8. Wykaż, że przestrzeń $L^q[0,1]$ z normą $\|f\|_p$ nie jest zupełna dla $1 \leqslant p < q$.

9. Wykaż, że jeśli zbiór A jest domknięty oraz $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A \subset A$, to A jest wypukły.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 4

1. Dla jakich p przestrzenie l^p, $L^p[0,1]$ są ośrodkowe?

2. Czy przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa?

3. Niech $C_{\text{ogr}}(\mathbb{R})$ będzie przestrzenią funkcji ciągłych i ograniczonych na $\mathbb{R}$ z normą supremum. Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

4. Przestrzeń $\mathrm{Lip}[0,1]$ określamy jako przestrzeń wszystkich funkcji Lipschitzowskich na $[0,1]$ z normą
$$\|f\| := \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{s,t\in[0,1],s\neq t} \frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|}.$$
Wykaż, że jest to przestrzeń Banacha. Czy jest ona ośrodkowa?

5. Dla jakich $1 \leqslant p \leqslant \infty$ funkcja $F(t) = I_{[0,t]}$ jest funkcją ciągłą z $[0,1]$ w $L^p[0,1]$?

6. Wykaż, że $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funcjonałem na $C[0,1]$ i policz jego normę.

7. Niech $X := \{f \in C[0,1]\colon f(t) = 2f(1-t), t \in [0,1/2]\}$. Udowodnij, że następujące funcjonały są ciągłe i policz ich normy:
a) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx$,
b) $\varphi(f) := f(\frac{1}{4})$,
c) $\varphi(f) := f(\frac{3}{4})$.

8. Wykaż, że każdy zbiór domknięty wypukły jest przecięciem półprzestrzeni domkniętych.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 5

1. Na przestrzeni $C^k[0,1]$, $k \geqslant 1$ definiujemy normę $\max_{0\leqslant i\leqslant k}\sup_{t\in[0,1]}|f^{(i)}(t)|$. Udowodnij ciągłość i oblicz normę następujących funkcjonałów na $C^k[0,1]$:
   a) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(t)dt$,
   b) $\varphi(f) := f'(1/2)$,
   c) $\varphi(f) = f(1) - f(0)$.

2. Mówimy, że podzbiór A przestrzeni Banacha X jest liniowo gęsty, jeśli kombinacje liniowe punktów z A są gęste w X. Wykaż, że A jest liniowo gęsty w X wtedy i tylko wtedy gdy
   a) nie istnieje właściwa domknięta podprzestrzeń $F \subset X$ zawierająca A;
   b) każdy ciągły funkcjonał zerujący się na A jest równy 0.

3. Wykaż, że kula jednostkowa w przestrzeni Banacha jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy wymiar przestrzeni jest skończony.

4. Niech $M := \{f \in C[0,1]\colon \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_{1/2}^1 f(t)dt\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$. Niech $g(t) = t$, oblicz $\mathrm{dist}(g,M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g,M) = \|f-g\|$?

5. $M := \{f \in L^1[0,1]\colon \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L^1[0,1]$. Niech $g \equiv 1$, oblicz $\mathrm{dist}(g,M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g,M) = \|f-g\|$? Ile jest takich funkcji?

6. Niech K będzie środkowosymetrycznym zwartym wypukłym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ o niepustym wnętrzu. Określamy
$$K^o := \{y \in \mathbb{R}^n\colon \sup_{x\in K}|\langle x,y\rangle| \leqslant 1\}.$$
   Wykaż, że K^o jest środkowosymetryczne, zwarte, wypukłe i ma niepuste wnętrze. Ile wynosi $(K^o)^o$?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 6

1. Wykaż, że na l_∞ istnieje funkcjonał ciągły o normie jeden, który każdemu ciągowi zbieżnemu przyporządkowuje jego granicę. Udowodnij, że taki funcjonał jest monotoniczny.

2. Jaka jest norma funkcjonału $\varphi(f) := \int_0^1 e^x f(x)dx$ na $L^p(0,2)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$?

3. Dla jakich p z przedziału $[1,\infty]$ wzór $\varphi(x) := \sum_{n=1}^\infty n^{-1/3} x_n$ zadaje ciągły funkcjonał na l_p?

4. Niech c oznacza przestrzeń ciągów zbieżnych, a c_0 przestrzeń ciągów zbieżnych do zera (z normą supremum). Opisz przestrzenie c_0^* i c^*.

5. Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\Delta(x) := \{x^* \in X^* \colon x^*(x) = 1 = \|x^*\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.

6. Podaj przykłady $x \in l_1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n-wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.

7. Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

8. Przestrzeń $C[0,1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L^\infty[0,1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0,1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L^\infty[0,1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L^1[0,1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnij, że jeśli $f \in L^\infty[0,1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 7

1. Niech μ będzie skończoną miarą borelowską na $[0,1]$. Wykaż, że funkcjonał dany wzorem $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)d\mu(x)$ jest ciągły na $C[0,1]$ i policz jego normę.

2. Dla $x \in [0,1]$, niech $\delta_x(f) = f(x)$. Udowodnij, że
a) δ_x jest ciągłym liniowym funkcjonałem na $C[0,1]$ o normie 1.
b) Jeśli $(x_n)_{n=1}^N$ jest skończonym ciągiem różnych punktów z $[0,1]$, to dla dowolnych liczb a_n,
$$\|\sum_{n=1}^N a_n \delta_{x_n}\|_{C[0,1]^*} = \sum_{n=1}^N |a_n|.$$
c) Wykaż, że b) zachodzi dla $N = \infty$.

3. Wykaż, że dla $f \in L^1[0,1]$ funkcjonał φ_f na $C[0,1]$ zadany wzorem $\varphi_f(g) := \int_0^1 f(t)g(t)$ jest ciągły oraz $\|\varphi_f\| = \|f\|_1$.

4. Niech $Tf(x) := \int_0^x f(s)ds$. Wykaż, że T jest ciągłym operatorem z L^1 w $C[0,1]$. Oblicz $\|T\|$.

5. Wykaż, że T jest ciągły z L^p w L^q dla $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

6. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n\geqslant 1}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in l_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.

7. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$.

8. Załóżmy, że $f_n \in L^1[0,1]$ są takie, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in C[0,1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_1 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 = 0$?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 8

1. Niech $C(T)$ oznacza klasę funkcji ciągłych na $\mathbb{R}$ o okresie 2π. Wykaż, że jest to przestrzeń Banacha. Ponadto dla dowolnego $f \in L^1[-\pi, \pi]$ przekształcenie $\varphi_f\colon C(T) \to \mathbb{R}$ zadane wzorem $\varphi(g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ definiuje ciągły funkcjonał liniowy oraz $\|\varphi_f\| = \|f\|_{L^1[-\pi,\pi]}$.

2. Dla $f \in C(T)$ określamy współczynniki Fouriera f wzorem $a_n(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Wykaż, że dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ istnieje funkcja $f \in C(T)$ taka, że jej szereg Fouriera $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(f)e^{inx}$ jest rozbieżny.

3. Załóżmy, że $(X, \|\cdot\|_1)$ i $(X, \|\cdot\|_2)$ są przestrzeniami Banacha. Wykaż, że jeśli $\|x\|_1 \leqslant C\|x\|_2$ dla wszystkich $x \in X$, to te dwie normy są równoważne.

4. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $y^* \in Y^*$, $y^*(T)$ jest ciąglym funkcjonałem na X.

5. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) =: (P_1x, P_2y) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y.

6. Załóżmy, że X, Y i Z są przestrzeniami Banacha, zaś $B\colon X \to Z$ oraz $C\colon Y \to Z$ są ciagłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y.

7. Niech $T\colon l_1 \to l_p$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $Tx = (T_1x, T_2x, \ldots)$. Wykaż, że jeśli dla każdego i, T_i jest ciągłym funkcjonałem na l_1, to T jest ciągłe.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 9

1. Niech $X := \{f \in L^2[0,1] \colon f|[0,1/2] = 0\} \subset L^2[0,1]$ Znajdź $X^\perp$ i rzut ortogonalny na X.

2. Niech $X := \{f \in L^2[-1,1] \colon f(x) = f(-x)\} \subset L^2[-1,1]$ Znajdź $X^\perp$ i rzut ortogonalny na X..

3. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L^2[0,1]$ składającą się z funkcji stałych na $[k/n,(k+1)/n)$, $k = 1,\dots,n$.
   a) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n.
   b) Znajdź odległość $f(t) = t$ w $L^2[0,1]$ od V_n.
   c) Udowodnij, że dla dowolnej funkcji $f \in L^2[0,1]$, $\|f - P_n f\|_2 \to 0$ przy $n \to \infty$ (P_n oznacza rzut ortogonalny na V_n.

4. Wykaż, że norma $\|\cdot\|$ jest zadana przez iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ dla wszystkich x, y.

5. Znajdź ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w $L^2[-1,1]$.

6. Znajdź wielomian stopnia 2 taki, że $\int_{-1}^{1} |t^4 - w(t)|^2 dt$ jest najmniejszy.

7. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a
$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad t \in [-1,1], \ n \geqslant 0.$$
   a) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L^2[-1,1]$.
   b) Czy jest to układ zupełny?

8. Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a
$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \quad t \geqslant 0, \ n \geqslant 0$$
   jest układem ortogonalnym w $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t}dt)$. Czy jest to układ zupełny?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 10

1. Niech $f(x) = x$ dla $x \in (-\pi, \pi)$. Znajdź rozwinięcie f w szereg Fouriera $\sum_n a_n e^{int}$.

2. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi, \pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$, przy czym ciąg jest zbieżny w L^2. Ile wynosi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$?

3. Jak wygląda odpowiednie rozwinięcie w szereg Fouriera dla funkcji nieparzystych?

4. Niech $r_k := \mathrm{sgn}(sin 2^k \pi x)$, $k = 1, 2, \ldots$. Wykaż, że jest to układ ortonormalny, niezupełny w $L^2[0, 1]$. Dla skónnczonych zbiorów $A \subset \{1, 2, \ldots\}$ określamy $w_A := \prod_{k \in A} r_k$ $w_\emptyset := 1$. Wykaż, że $(w_A)_A$ jest bazą o.n. $L^2[0, 1]$.

5. Niech μ będzie miarą skończoną na $[0, 1]$, która nie jest skupiona na zbiorze skończonym. Wykaż, że istnieje baza o.n. $(f_n)_{n \geqslant 0}$ $L^2([0, 1], \mu)$ taka, że f_n jest wielomianem stopnia n.

6. Niech $(f_i(x))_i$ i $(g_j(y))_j$ będą układami ortonormalnymi w $L^2(X, \mu_1)$ i $L^2(Y, \mu_2)$ odpowiednio. Wykaż, że
a) układ $(f_i(x) g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(X \times Y, \mu_1 \mu_2)$.
b) jeśli układy $(f_i)_i, (g_j)_j$ są zupełne, to układ $(f_i g_j)_{ij}$ też jest zupełny.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 11

1. Znajdź transformatę Fouriera funkcji:
   a) $e^{-x}I_{[0,\infty)}(x)$
   b) $\sin x I_{[-\pi,\pi]}(x)$.

2. Niech $T\colon l_p \to l_p$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$. Jak wygląda T^*?

3. Niech $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ będzie określony jako $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$. Znajdź T^*.

4. Niech $T\colon L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ będzie określony wzorem $Tf(x) := \int_0^1 k(x,y)f(y)dy$ dla pewnej funkcji ograniczonej mierzalnej k. Znajdź T^*.

5. Określmy $T\colon l_1 \to c_0$ jako

$$T((x_n)_{n\geqslant 1}) := (\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i)_{n\geqslant 1}.$$

   Znajdź T^*.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I - 12

1. Niech $(e_n)_{n\geqslant 0}$ będzie kanoniczną bazą l_p. Wykaż, że operator liniowy $T\colon l_p \to l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\lim a_n = 0$.

2. Czy operator „przesunięcia w prawo" na l_p jest zwarty?

3. Niech $T\colon L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$. Czy jest to operator zwarty?

4. Określmy $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

5. Wykaż, że jeśli $T \in B(X,Y)$ jest skończenie wymiarowy (tzn. $\dim T(X) < \infty$), to T jest zwarty.

6. Wykaż, że $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ $T(B_X)$ da się pokryć skończoną liczbą kulek w Y o promieniu ε.

7. Wykaż, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń $Y_\varepsilon \subset Y$ taka, że $\dim Y_\varepsilon < \infty$ oraz $\operatorname{dist}(T(B_X), Y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

8. Załóżmy, że $T_n \in B(X,Y)$ są skończenie wymiarowe oraz $\|T_n - T\| \to 0$. Wykaż, że T jest zwarty.

9. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią Hilberta, a $T \in B(X,X)$ jest zwarty, to istnieje ciąg skończenie wymiarowych operatorów T_n taki, że $\|T_n - T\| \to 0$.