Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 1
(zadania gwiazdkowe do oddania 16.10)

1. Która z następujących przestrzeni jest przestrzenią Banacha w normie supremum: $C(\mathbb{R})$; $C_{ogr}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych ograniczonych; $C_{zw}(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych o nośniku zwartym; $C_0(\mathbb{R})$ – przestrzeń funkcji ciągłych takich, że $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$?

2. Na przestrzeni $X = C^1[0,1]$ rozpatrzmy następujące normy:
i) $\|f\|_\infty$
ii) $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$
iii) $|f(0)| + \|f'\|_\infty$
iii) $\|f\|_\infty + \sup_{x\in(0,1)} |xf'(x)|$
Które z tych norm wprowadzają na X strukturę przestrzeni Banacha?

3. Wykaż, że $\mathrm{Lip}[0,1]$ - przestrzeń funkcji lipschitzowskich na $[0,1]$ z normą $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$ jest przestrzenią Banacha.

4* Niech $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie funkcją wypukłą taką, że $\varphi(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$. Określamy

$$l_\varphi := \Big\{ x = (x_n)_{n=1}^\infty \colon \exists t > 0 \ \sum_n \varphi\Big(\frac{|x_n|}{t}\Big) < \infty \Big\}$$

oraz

$$\|x\|_\varphi := \inf \Big\{ t > 0 \colon \sum_n \varphi\Big(\frac{|x_n|}{t}\Big) \leqslant 1 \Big\} \text{ dla } x \in l_\varphi.$$

Wykaż, że l_φ z normą $\|x\|_\varphi$ jest przestrzenią Banacha.

5. Powiemy, że dwie metryki ρ_1 i ρ_2 są równoważne, jeśli definiują takie same topologie (czyli ciągi mają w obu metrykach te same granice). Wykaż, że jeśli istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że

$$\forall_{x,y}\ c\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y) \leqslant C\rho_1(x,y), \tag{1}$$

to metryki są równoważne.

6. Wskaż dwie równoważne metryki, które nie spełniają (1).

7. Mówimy, że dwie normy są równoważne, jeśli metryki przez nie wyznaczone są równoważne. Wykaż, że normy $\|\cdot\|_1$ i $\|\cdot\|_2$ są równoważne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją stałe $0 < c < C < \infty$ takie, że $c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ dla wszystkich x.

8. Wskaż dwie nierównoważne normy na przestrzeni ciągów ograniczonych.

9. Wykaż, że wszystkie normy na $\mathbb{R}^n$ są równoważne.

10* Czy istnieje przestrzeń X i dwie nierównoważne normy wprowadzające na X strukturę przestrzeni Banacha?

11* Czy na c_{00} – przestrzeni ciągów o skończenie wielu wyrazach niezerowych da się wprowadzić strukturę przestrzeni Banacha?

12. Naszkicuj kulę jednostkową w następujących przestrzeniach: l_1^2, l_2^2, l_∞^2, l_p^2, l_1^3, l_2^3, l_∞^3.

13. Niech $x = (x_k)_{k=1}^n$. Wykaż, że
a) $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p-1/q}\|x\|_q$ dla $1 \leqslant p < q$,
b) $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.
c) Czy stałe w a) są optymalne? Jakie zawierania dla kul jednostkowych w l_p^n wynikają z a)?

14. Niech $x = (x_k)_{k=1}^\infty$ oraz $1 \leqslant p < q$.
a) Wykaż, że $\|x\|_q \leqslant \|x\|_p$.
b) Znajdź wektor x taki, że $\|x\|_p = \infty$ oraz $\|x\|_q < \infty$.
c) Czy zawsze $\lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$? Jeśli nie, to kiedy tak jest?

15* Wykaż, że $\{x = (x_k)_{k=1}^\infty \colon \sum_{i=1}^\infty |x_i| \leqslant 1\}$ jest domkniętym wypukłym podzbiorem l_2 o pustym wnętrzu. Czy jest to zbiór zwarty?

16. Niech $(X, \mathcal{F}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą skończoną μ oraz f będzie funkcją mierzalną na X. Udowodnij, że dla $1 \leqslant p < q$,
a) $\|f\|_p \leqslant \mu(X)^{1/p-1/q}\|f\|_q$, w szczególności $\|f\|_p \leqslant \|f\|_q$ gdy $\mu(X) = 1$. Kiedy zachodzi równość?
b) Wykaż, że $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
c) Znajdź funkcję $f \in L_p[0, 1]$ taką, że $\|f\|_q = \infty$.
d) Znajdź funkcję $f \in L_q[0, \infty)$ taką, że $\|f\|_p = \infty$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 2
(zadania gwiazdkowe do oddania 23.10)

1. Niech $(X, \| \ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Wykaż ciągłość następujących przekształceń:
(i) $x \mapsto \|x\|$, $x \in X$,
(ii) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, $\lambda \in F$, $x \in X$,
(iii) $(x, y) \mapsto x + y$, $x, y \in X$.

2. Znajdź $|\mu|$ i oblicz $\|\mu\|$ dla następujących miar ze znakiem na $[0, 1]$:
(i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{1/n}$,
(ii) $\mu(A) = \int_A f(x)dx$, $f \in L_1([0, 1])$.

3* Wykaż, że jeśli ν jest miarą skończoną, zaś μ miarą zespoloną taką, że $\mu(A) = \int_A f d\nu$, to $|\mu|(A) = \int_A |f| d\nu$.

4. Oblicz normę $\mathrm{id}\colon l_p^n \to l_q^n$ dla $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

5. Określamy $T\colon l_1 \to c_0$ wzorem $T(x)_n = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$. Wykaż, że T jest ciągłe i oblicz jego normę.

6. Znajdź normę przekształcenia $f(x) \to xf(x)$ z $L_p[-1, 1]$ w $L_1[-1, 1]$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

7. Niech $g \in L_\infty(X, \mu)$ wykaż, że przekształcenie T dane wzorem $Tf(x) := g(x)f(x)$ jest ciągłym operatorem na $L_p(X, \mu)$. Ile wynosi jego norma?

8* Niech $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$, wykaż, że T jest ciągłym przekształceniem z $L_p[0, 1]$ w $L_q[0, 1]$ dla dowolnych $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$.

9. Wykaż, że $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx - \int_{1/2}^1 f(x)dx$ jest ciągłym funcjonałem na $C[0, 1]$ i policz jego normę.

10. Niech $X := \{f \in C[0, 1]\colon f(t) = 2f(1 - t), t \in [0, 1/2]\}$. Czy X z normą supremum jest przestrzenią Banacha? Udowodnij, że następujące funcjonały są ciągłe na X i policz ich normy:
a) $\varphi(f) := f(\frac{1}{4})$,
b) $\varphi(f) := f(\frac{3}{4})$,
c) $\varphi(f) := \int_0^{1/2} f(x)dx$.

11. Zbadaj ciągłość i oblicz normę przekształcenia $T\colon L_p[0, 1] \to L_p[0, 1]$ danego wzorem $Tf(x) = f(\sqrt{x})$.

12. Oblicz normę przekształcenia $x \mapsto [x]$ z X w X/X_0.

13. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha. Wykaż, że $X \times Y$ z normą $(x, y) = \|x\|_X + \|y\|_Y$ jest przestrzenią Banacha, przestrzeń tą oznaczamy wzorem $X \oplus Y$. Niech $i\colon X \to X \oplus Y$ będzie dane wzorem $i(x) = (x, 0)$. Wykaż, że i jest izometrią oraz $X \oplus Y/i(X)$ jest izometryczne z Y.

14* Wykaż, że dla liczb zespolonych $z_1, z_2, \dots, z_n$ istnieje taki zbiór $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$, że

$$\Big|\sum_{i \in I} z_i\Big| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{n} |z_i|.$$

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 3
(zadania gwiazdkowe do oddania 30.10)

1* Wykaż, że norma $\| \ \|$ jest zadana przez iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy gdy spełniony jest warunek równoległoboku $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$ dla wszystkich x, y.

2. Niech $M := \{f \in C[0,1] \colon \int_0^{1/2} f(t)dt = \int_{1/2}^1 f(t)dt\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $C[0,1]$. Niech $g(t) = t$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$?

3. $M := \{f \in L_1[0,1] \colon \int_0^1 f(t)dt = 0\}$. Wykaż, że M jest domkniętą podprzestrzenią $L_1[0,1]$. Niech $g \equiv 1$, oblicz $\mathrm{dist}(g, M)$. Czy istnieje funkcja $f \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(g, M) = \|f - g\|$? Ile jest takich funkcji?

4* Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią l_p, $1 < p < \infty$. Czy dla dowolnej funkcji $f \in l_p$ istnieje funkcja $g \in M$ taka, że $\mathrm{dist}(f, M) = \|f - g\|$? Czy może być więcej niż jedna taka funcja?

5. Niech $M := \{f \in L_2[-1,1] \colon f(x) = f(-x)\} \subset L_2[-1,1]$. Znajdź $M^\perp$ i rzut ortogonalny na M.

6. Niech V_n będzie podprzestrzenią $L_2[0,1]$ składającą się z funkcji stałych na $[k/n, (k+1)/n)$, $k = 1, \ldots, n$.
a) Znajdź $V_n^\perp$
b) Znajdź rzut ortogonalny f na V_n.
c) Znajdź odległość $f(t) = t$ w $L_2[0,1]$ od V_n.

7. Załóżmy że $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ są dwoma σ-ciałami podzbiorów X, a μ miarą na $(X, \mathcal{F})$. Wykaż, że
i) $M = L_2(X, \mathcal{G}, \mu)$ jest domkniętą podprzestrzenią $L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
ii) $\int_A P_M f d\mu = \int_A f d\mu$ dla dowolnego $A \in \mathcal{G}$ takiego, że $\mu(A) < \infty$ oraz $f \in L_2(X, \mathcal{F}, \mu)$.
iii) P_M jest nieujemny, tzn. $P_M f \geqslant 0$ μ-p.w., jeśli $f \geqslant 0$ μ-p.w..

8. Wykaż, że dla dowolnego zbioru A w przestrzeni unitarnej H, $(A^\perp)^\perp = \overline{\mathrm{Lin}(A)}$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 4
(zadania gwiazdkowe do oddania 6.11)

1. Niech M będzie domkniętą podprzestrzenią przestrzeni Hilberta, a $(u_\alpha)_{\alpha\in A}$ bazą o.n. M. Wykaż, że rzut ortogonalny na M ma postać
$$P_M x = \sum_{\alpha\in A} \langle x, u_\alpha\rangle u_\alpha.$$

2. Znajdź ortogonalizację ciągu wektorów $1, t, t^2$ w $L^2[-1,1]$.

3. Znajdź wielomian stopnia 2 taki, że $\int_{-1}^1 |t^4 - w(t)|^2 dt$ jest najmniejszy.

4. Wykaż, że układ Rademachera $f_n := \operatorname{sgn}(\sin(2^n\pi x))$, $n = 1, 2, \ldots$ jest układem ortogonalnym w $L^2[0,1]$. Czy jest to układ zupełny?

5. Niech P_n będzie układem wielomianów Legendre'a
$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \quad t \in [-1,1],\ n \geqslant 0.$$
a) Wykaż, że P_n jest układem ortogonalnym w $L^2[-1,1]$. Jak go trzeba znormalizować by był ortonormalny?
b) Czy jest to układ zupełny?

6. Niech μ będzie miarą skończoną na $[0,1]$, która nie jest skupiona na zbiorze skończonym. Wykaż, że istnieje baza o.n. $(f_n)_{n\geqslant 0}$ przestrzeni $L^2([0,1],\mu)$ taka, że f_n jest wielomianem stopnia n.

7* Niech L_n będzie układem wielomianów Laguerre'a
$$L_n(t) = \frac{1}{n!}e^t\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t}), \quad t \geqslant 0,\ n \geqslant 0.$$
a) Wykaż, że L_n jest układem ortogonalnym w $L^2(\mathbb{R}_+, e^{-t}dt)$. Czy jest on ortonormalny?
b) Czy jest to układ zupełny?

8* Niech H_n będzie układem wielomianów Hermite'a
$$H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!}}e^{t^2/2}\frac{d^n}{dt^n}(e^{-t^2/2}).$$
a) Wykaż, że $(H_n)_{n\geqslant 0}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(\mathbb{R}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}dt)$.
b) Czy jest to układ zupełny?

9* Niech $(f_i(x))_i$ i $(g_j(y))_j$ będą układami ortonormalnymi w $L^2(X,\mu_1)$ i $L^2(Y,\mu_2)$ odpowiednio. Wykaż, że
a) układ $(f_i(x)g_j(y))_{i,j}$ jest układem ortonormalnym w $L^2(X\times Y, \mu_1\mu_2)$.
b) jeśli układy $(f_i)_i, (g_j)_j$ są zupełne, to układ $(f_i g_j)_{ij}$ też jest zupełny.

10* Wykaż, że dla $1 \leqslant p < \infty$ przestrzeń l_2 można izometrycznie włożyć w $L_p([0,1])$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 5
(zadania gwiazdkowe do oddania 20.11)

1. Wykaż, że przestrzeń $L_2(\mathbb{R}^n)$ jest ośrodkowa i wywnioskuj stąd ośrodkowość przestrzeni $L_2(A)$ dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset \mathbb{R}^n$.

2. Wyznacz p dla których $L_p[0,1]$ jest ośrodkowa.

3. Wykaż, że jeśli μ jest miarą borelowską na Ω - otwartym podzbiorze $\mathbb{R}^n$ taką, że $\mu(K) < \infty$ dla K zwartych podzbiorów Ω, to $C^\infty_{\mathrm{zw}}(\Omega)$ jest gęste w $L_p(\mu)$ dla $1 \leqslant p < \infty$.

4. Które z następujących przestrzeni są ośrodkowe: $M([0,1])$ - przestrzeń zespolonych miar borelowskich na $[0,1]$, $\mathrm{Lip}[0,1]$, $C^k[0,1]$?

5. Wykaż, że przestrzeń X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przeliczalny podzbiór liniowo gęsty w X.

6. Niech $r_n := \mathrm{sgn}(\sin(2^n\pi x))$, $n = 1,2,\ldots$ będzie układem Rademachera. oraz $\mathcal{S}$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów $\{1,2,\ldots\}$. Zdefiniujmy *układ Walsha* wzorem $w_\emptyset \equiv 1$ oraz $W_A = \prod_{n\in A} r_n$ dla $A \neq \emptyset$. Udowodnij, że $(w_A)_{A\in\mathcal{S}}$ jest bazą o.n. $L_2[0,1]$.

7. Rozwiń funkcje t na przedziale $[-\pi,\pi]$ w szereg Fouriera i wykorzystaj uzyskane rozwinięcie do obliczenia $\sum_{n=1}^\infty n^{-2}$.

8. Wykaż, że każdą funkcję parzystą f w $L^2[-\pi,\pi]$ da się przedstawić w postaci $f(t) = \sum_{n=0}^\infty a_n \cos nt$, przy czym ciąg jest zbieżny w L^2. Ile wynosi $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^2$?

9. Jak wygląda odpowiednie rozwinięcie w szereg Fouriera dla funkcji nieparzystych?

10* Wykaż, że przestrzeń Banacha X jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciągłe liniowe przekształcenie przeprowadzające l_1 na X.

11. Wykaż, że jeśli X_0 jest domkniętą podprzestrzenią przestrzeni unormowanej X oraz $x \in X \setminus X_0$ to istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ zerujący się na X_0 taki, że $\varphi(x) = 1$.

12. Niech F będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X. Wykaż, że dla dowolnego $x \in X$,
$$\mathrm{dist}(x,F) = \sup\{|\varphi(x)| \colon \varphi \in X^*, \|\varphi\| \leqslant 1, \varphi_{|F} = 0\}$$

13* Udowodnij, że ośrodkowość przestrzeni X^* implikuje ośrodkowość przestrzeni X. Czy odwrotna implikacja jest prawdziwa?

14* Załóżmy, że $(G,+)$ jest półgrupą abelową. Wykaż, że na $l_\infty(G)$ istnieje funkcjonał φ o normie 1 taki, że $\varphi(1) = 1$ oraz $\varphi(\tau_h(x)) = \varphi(x)$ dla wszystkich $x \in l_\infty(G)$ oraz $h \in G$, gdzie $\tau_h(x)(g) = x(g+h)$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 6

(zadania gwiazdkowe do oddania 4.12)

1. Niech A i B będą rozłącznymi niepustymi wypukłymi podzbiorami przestrzeni Banacha X takimi, że A jest domknięty, a B jest zwarty. Wykaż, że istnieje funkcjonał $\varphi \in X^*$ taki, że $\sup_{x \in A} \mathrm{Re}(\varphi(x)) < \inf_{x \in B} \mathrm{Re}(\varphi(x))$.

2. Znajdź przestrzeń dualną do c – przestrzeni ciągów zbieżnych z normą supremum.

3* Wykaż, że $L_p(\mu)^* = L_q(\mu)$ dla $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ oraz dowolnej (niekoniecznie σ-skończonej) miary μ.

4. a) Niech X będzie przestrzenią Banacha oraz $x \in X$ będzie wektorem o normie 1. Udowodnij, że $\Delta(x) := \{x^* \in X^* \colon x^*(x) = 1 = \|x^*\|\}$ jest niepustym, domkniętym zbiorem wypukłym.
   b) Podaj przykłady $x \in l_1$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe, n-wymiarowe, nieskończenie wymiarowe.
   c) Opisz wszystkie $x \in c_0$ takie, że $\Delta(x)$ jest jednopunktowe.

5. Przestrzeń $C[0,1]$ można traktować jako domkniętą podprzestrzeń $L_\infty[0,1]$. Funkcjonał $\delta_x(f) := f(x)$ jest ciągłym funkcjonałem o normie 1 na $C[0,1]$, zatem z twierdzenia Hahna-Banacha można go rozszerzyć do funkcjonału φ_x na $L_\infty[0,1]$ o normie 1. Wykaż, że nie istnieje funkcja $g \in L_1[0,1]$ taka, że $\varphi_x(f) = \int_0^1 f(s)g(s)ds$. Udowodnij, że jeśli $f \in L_\infty[0,1]$ jest taka, że $f = 0$ na zbiorze $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, to $\varphi_x(f) = 0$.

6. Wykaż, że przestrzeń X jest refleksywna wtedy i tylko wtedy gdy X^* jest refleksywna.

7. Które z następujących przestrzeni są refleksywne: l_p, $L_p[0,1]$, c_0, $C[0,1]$, $M[0,1]$?

8. Wykaż, że c_0 wkłada się izometrycznie w $C[0,1]$, a l_∞ w $C_{\mathrm{ogr}}(0,1)$.

9. Wykaż, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha wkłada się izometrycznie w l_∞.

10* Wykaż, że każda miara skończona na przestrzeni polskiej jest regularna.

11. Załóżmy, że $x = (x_n)_{n \geqslant 1}$ jest takim ciągiem, że dla każdego $y \in l_p$ szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny. Wykaż, że $x \in l_q$ dla $1/p + 1/q = 1$.

12. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ jest zbieżny dla każdego ciągu y_n zbieżnego do zera wtedy i tylko wtedy gdy $\sum_{n=1}^\infty |x_n| < \infty$.

13. Załóżmy, że $f_n \in L_2[0,1]$ są takie, że $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0$ dla wszystkich funkcji $g \in L_2[0,1]$. Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_2 < \infty$. Czy musi zachodzić $\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0$?

14* Czy w każdej przestrzeni Banacha nieskończonego wymiaru istnieje ciąg słabo zbieżny do zera, który nie zbiega do zera w normie?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 7
(zadania gwiazdkowe do oddania 11.12)

1* Wykaż, że jeśli ciąg wektorów x_n zbiega słabo do zera, to istnieje ciąg kombinacji wypukłych wektorów x_n zbieżny do zera w normie.

2. Wykaż, że ciąg wektorów $x_n = (x_n(k))_{k=1}^{\infty}$ zbiega do słabo do zera w l_p, $1 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sup_n \|x_n\|_p < \infty$ oraz $\lim_{n\to\infty} x_n(k) = 0$ dla wszystkich k. Czy charakteryzacja ta jest prawdziwa dla l_1? A dla c_0?

3. Kiedy ciąg wektorów $x_n = (x_n(k))_{k=1}^{\infty}$ zbiega do słabo z gwiazdką do zera w $l_1 = c_0^*$?

4. Wykaż, że jeśli $1 < p < \infty$ oraz $f_n \in L_p[0,1]$ są takie, że $\|f_n\|_p \leqslant 1$ i $\lambda_1(\{x\colon f_n(x) \neq 0\}) \to 0$, to f_n zbiegają słabo do zera. Czy jest to prawdą dla $p = 1$?

5. Wykaż, że ciąg funkcji Rademachera $r_k := \mathrm{sgn}(\sin 2^k \pi x)$ jest słabo zbieżny do zera w $L_p[0,1]$ dla $1 \leqslant p < \infty$.

6* Czy r_k zbiega słabo do zera w L_∞?

7* Niech X będzie przestrzenią liniową, a Y pewną podprzestrzenią funkcjonałów liniowych na X. Oznaczmy przez $\sigma(X,Y)$ najsłabszą topologię na X dla której wszystkie funkcjonały z Y są ciągłe. Wykaż, że jeśli jakiś funkcjonał φ na X jest ciągły w topologii $\sigma(X,Y)$, to $\varphi \in Y$. Wywnioskuj stąd, że słaba i słaba* topologie na X^* się pokrywają wtedy i tylko wtedy, gdy X jest refleksywna.

8* Mówimy, że dwie przestrzenia Banacha X i Y są izomorficzne jeśli istnieje ciągły odwracalny operator liniowy $T\colon X \to Y$. Wykaż, że l_p i l_q dla $p \neq q$ nie są izomorficzne.

9. Załóżmy, że X jest nieskończenie wymiarową przestrzenią unormowaną, zaś $B_X = \{x \in X\colon \|x\| <\leqslant 1\}$ jest domkniętą kulą jednostkową w X.
i) Pokaż, że dla $\varepsilon > 0$ istnieją wektory $x_1, x_2, \ldots$ takie, że $\|x_j - x_k\| \geqslant 1 - \varepsilon$ dla $j \neq k$.
ii) Wywnioskuj stąd, że B_X nie jest zwarte.
iii) Czy i) zachodzi dla $\varepsilon = 0$?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 8

(zadania gwiazdkowe do oddania 18.12)

1. Załóżmy, że T jest operatorem liniowym między przestrzeniami Banacha X i Y. Wykaż, że T jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varphi \in Y^*$, $\varphi(T)$ jest ciągłym funkcjonałem na X.

2. Niech Y i Z będą dwoma domkniętymi podprzestrzeniami przestrzeni Banacha X takimi, że dla dowolnego $x \in X$ istnieje dokładnie jedna para wektorów $(y, z) =: (P_1x, P_2x) \in Y \times Z$ taka, że $x = y + z$. Wykaż, że P_1 jest ciągłym rzutem X na Y.

3. Załóżmy, że X, Y i Z są przestrzeniami Banacha, zaś $B\colon X \to Z$ oraz $C\colon Y \to Z$ są ciagłymi operatorami liniowymi. Wykaż, że jeśli dla każdego $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y = Ax$ taki, że $Bx = Cy$, to A jest ciągłym operatorem z X w Y.

4* Wykaż, że na ośrodkowej przestrzeni Banacha σ-ciało zbiorów borelowskich w topologii normowej pokrywa się z σ-ciałem zbiorów borelowskich w słabej topologii. Czy założenie ośrodkowości jest konieczne?

5* Czy słaba topologia na przestrzeni l_p, $1 \leqslant p < \infty$ jest metryzowalna (tzn. czy istnieje metryka taka, że zbiory otwarte w tej metryce i w słabej topologii są takie same)?

6* Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha, a $T\colon X \to Y$ jest ciągłym operatorem na. Czy musi wówczas istnieć $\varepsilon > 0$ takie, że każdy operator liniowy ciągły $S\colon X \to Y$ spełniający $\|S - T\| \leqslant \varepsilon$ jest na?

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 9

1. Załóżmy, że X i Y są przestrzeniami Banacha oraz T jest przekształceniem X na Y. Wykaż, że istnieje izomorfizm $S\colon X/\ker(T) \to Y$ taki, że $T = Sq$, gdzie q jest kanonicznym rzutem X na $X/\ker(T)$. Wywnioskuj stąd, że każda ośrodkowa przestrzeń Banacha jest izomorficzna z ilorazem przestrzeni l_1.

2. Niech $(e_n)_{n\geqslant 0}$ będzie kanoniczną bazą l_p. Wykaż, że operator liniowy $T\colon l_p \to l_p$ taki, że $Te_n = a_n e_n$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3. Czy operator „przesunięcia w prawo" na l_p jest zwarty?

4. Niech $T\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(s)ds$. Czy jest to operator zwarty?

5. Określmy $T\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ jako $Tf(x) = \int_x^{x+1} f(y)dy$. Wykaż, że T jest ciągły. Czy T jest zwarty?

6. Wykaż, że $T \in B(X,Y)$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$, $T(B_X)$ da się pokryć skończoną liczbą kulek w Y o promieniu ε.

7. Wykaż, że operator T jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje przestrzeń skończenie wymiarowa $Y_\varepsilon \subset Y$ taka, że oraz $\sup_{x\in T(B_X)} \operatorname{dist}(x, Y_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$.

8. Wykaż, że jeśli X jest przestrzenią Banacha $1 \leqslant p < \infty$ oraz $T \in B(X, l_p)$ jest zwarty, to istnieje ciąg skończenie wymiarowych operatorów T_n taki, że $\|T_n - T\| \to 0$.

9. Niech $T\colon l_p \to l_p$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \ldots) = (\frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4 \ldots)$. Jak wygląda T^*?

10. Niech $T\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie określony jako $Tf(x) := \int_0^x f(y)dy$. Znajdź T^*.

11. Określmy $T\colon l_1 \to c_0$ jako
$$T((x_n)_{n\geqslant 1}) := \Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Big)_{n\geqslant 1}.$$
Znajdź T^*.

12. Operator $T : L^2[0,1] \to l^1$ jest dany wzorem
$$Tf = \Big(\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} f(x)dx\Big)_{n=1,2,\ldots}$$
Znajdź T^*.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 10
(zadania gwiazdkowe do oddania 15.01)

1* a) Wykaż, że każdy operator zwarty przekształca ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.
b) Wykaż, że istnieje operator niezwarty przekształcający ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie.
c) Załóżmy, że przestrzeń X jest refleksywna i ośrodkowa, zaś T jest operatorem ciągłym na T przekształcającym ciągi słabo zbieżne na ciągi zbieżne w normie. Wykaż, że T jest zwarty.

2. Wykaż, że $\sigma(T^*) = \sigma(T)$ i $R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*$ dla $\lambda \notin \sigma(T)$.

3. Niech $Tx = (0, x_1, x_2/2, x_3/3, \ldots)$. Wykaż, że T jest zwartym operatorem na l_2 nie posiadającym wartości własnych. Wyznacz operator T^* i znajdź jego wartości własne.

4. Niech $T\colon L_2[0,1] \to L_2[0,1]$ będzie dany wzorem $Tf(x) = \int_0^x f(y)dy$, znajdź wartości własne T.

5. Niech T na l_2 będzie zadany wzorem $Tx = (a_n x_n)_n$ dla pewnego ciągu ograniczonego a_n. Znajdź wszystkie wartości własne i spektrum operatora T.

6. Niech $T\colon L_2(X,\mu) \to L_2(X,\mu)$ będzie postaci $Tf = gf$ dla pewnego $g \in L_\infty(X,\mu)$. Znajdź wartości własne i spektrum operatora T.

7. Wyznacz spektrum i rezolwentę operatora przesunięcia w lewo i w prawo na l_2.

8. Niech P będzie rzutem ortogonalnym na domkniętą podprzestrzeń M przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Wyznacz spektrum T.

9. Wykaż, że dla dowolnego niepustego, zwartego podzbioru K płaszczyzny zespolonej istnieje operator T na pewnej przestrzeni Hilberta, którego spektrum jest równe K.

10. Wykaż, że jeśli $\lambda \in \sigma(T)$, to $\lambda^n \in \sigma(T^n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$.

11* Załóżmy, że $S = \mathrm{Id} + T$, gdzie T jest operatorem zwartym z $B(X)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) S jest różnowartościowy,
ii) S jest na,
iii) S^* jest różnowartościowy,
iv) S^* jest na.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 11
(zadania gwiazdkowe do oddania 22.01)

1. Operator $T\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ jest dany wzorem $Tf(x) = \operatorname{sgn}(x)f(x+1)$. Znajdź sprzężenie Hilbertowskie T^*. Czy T jest samosprzężony, unitarny, normalny?

2. Podaj przykład izometrii na $L_2(\mathbb{R})$, która nie jest operatorem unitarnym.

3* Niech $T\colon l_2 \to l_2$ będzie dany wzorem $T(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ oraz $S = T + T^*$. Oblicz $\langle S^n e_1, e_1\rangle$.

4* Wykaż, że jeśli T jest operatorem na zespolonej przestrzeni Hilberta oraz $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ dla wszystkich x, to T jest samosprzężony.

5. Wykaż, że jeśli operator T jest samosprzężony, to $\|T\|$ lub $-\|T\|$ należą do spektrum T.

6. Załóżmy, że $k \in L_2([0,1]^2)$ i $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$. Określmy

$$Kf(x) = \int_0^1 f(y)k(x,y)f(y)dy.$$

   Wykaż, że i) K jest zwartym operatorem samosprzężonym;
   ii) istnieje baza o.n. $(\varphi_n)_{n\geqslant 1}$ przestrzeni $L_2[0,1]$ oraz liczby rzeczywiste $\lambda_n \to 0$ takie, że $K\varphi_n = \lambda_n\varphi_n$;
   iii) $k(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}$, przy czym szereg jest zbieżny w $L_2([0,1]^2)$.

7. Niech T będzie operatorem samosprzężonym. Wykaż, że
   i) $\lambda \notin T$ wtedy i tylko wtedy gdy istnieje $c > 0$ takie, że $\|Tx - \lambda x\| \geqslant c\|x\|$ dla wszystkich x.
   ii) $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.
   iii) $\sigma(T) \subset [m, M]$ dla $m = \inf_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ i $M = \sup_{\|x\|=1}\langle Tx, x\rangle$ oraz m i M należą do $\sigma(T)$.

Zadania z Analizy Funkcjonalnej I* - 12

1. Wykaż, że dla $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ i $z \in \mathbb{R}^n$
   i) jeśli $g(x) = f(x)e^{i\langle x,z\rangle}$, to $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y-z)$;
   ii) jeśli $g(x) = f(x-z)$, to $\widehat{g}(y) = \widehat{f}(y)e^{-i\langle x,z\rangle}$;
   iii) jeśli $g(x) = f(ax)$, $a > 0$, to $\widehat{g}(y) = a^{-n}\widehat{f}(y/a)$;
   iv) jeśli $g(x) = \overline{f(x)}$, to $\widehat{g}(y) = \overline{\widehat{f}(-y)}$.

2. Podaj przykład funkcji z L_2 takiej, że $f \notin L_1$, ale $\widehat{f} \in L_1$.

3. Oblicz transformatę Fouriera funkcji $e^{-ax^2}\sin(bx)$ dla $a > 0$.

4. Wykaż, że iloczyn i splot funkcji z klasy Schwartza jest w klasie Schwartza.

5. Udowodnij, że każdy ciągły homomorfizm z $\mathbb{R}^n$ w $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon\ |z| = 1\}$ jest postaci $x \mapsto e^{i\langle x,y\rangle}$ dla pewngo $y \in \mathbb{R}^n$.

6. Wykaż, że $\mathcal{F}^4 f = f$ dla $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$.