Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I*
gr.1, 15 grudnia 2009

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a T liniowym przekształceniem X w $C[0,1]$. Wykaż, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy ciagłe są wszystkie funkcjonały postaci $x \mapsto \int_a^b Tx(s)ds$, $0 < a < b < 1$.

2. Załóżmy, że x_n jest bazą o.n. ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy przekształcenie T na $\mathcal{H}$ wzorem $Tx = (\frac{1}{n}\langle x, x_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$.
   i) Wykaż, że przekształcenie T jest dobrze określone i ciągłe z $\mathcal{H}$ w l_p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
   ii) Oblicz normę przekształcenia $T\colon \mathcal{H} \to l_1$ i $T\colon \mathcal{H} \to l_\infty$.

3. Niech x_n będzie słabo zbieżnym do zera ciągiem elementów przestrzeni Banacha X. Wzór $T = (x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ zadaje wówczas przekształcenie z X^* w c_0. Czy przekształcenie to musi być ciągłe? Czy musi być zwarte?

4. Niech
$$X = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2\colon\ a_{2n-1} = a_{2n} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}.$$
   Znajdź odległość wektora $(1, 1/3, 1/9, \ldots)$ od przestrzeni X.

5. Przekształcenie T na l_4 ma postać $Tx = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
   i) $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^{4/3} < \infty$,
   ii) T jest ciągłe z l_4 w l_1,
   iii) T jest operatorem zwartym z l_4 w l_1.

6. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ istnieje niezerowy ciągły funkcjonał na $L_p[0,1]$ taki, że $\varphi(w) = 0$ dla dowolnej funkcji wielomianowej w?

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I*
gr.2, 15 grudnia 2009

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Dla jakich $p \in [1, \infty]$ istnieje niezerowy ciągły funkcjonał na $L_p[-1, 1]$ taki, że $\varphi(w) = 0$ dla dowolnej funkcji wielomianowej w?

2. Załóżmy, że x_n jest bazą o.n. ośrodkowej przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy przekształcenie T na $\mathcal{H}$ wzorem $Tx = (\frac{1}{n+1}\langle x, x_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$.
i) Wykaż, że przekształcenie T jest dobrze określone i ciągłe z $\mathcal{H}$ w l_p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.
ii) Oblicz normę przekształcenia $T\colon \mathcal{H} \to l_1$ i $T\colon \mathcal{H} \to l_\infty$.

3. Przekształcenie T na l_3 ma postać $Tx = (a_1x_1, a_2x_2, a_3x_3, \ldots)$. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|^{3/2} < \infty$,
ii) T jest ciągłe z l_3 w l_1,
iii) T jest operatorem zwartym z l_3 w l_1.

4. Niech
$$X = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in l_2\colon\ a_{2n-1} = -a_{2n} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots\}.$$
Znajdź odległość wektora $(1, 1/2, 1/4, \ldots)$ od przestrzeni X.

5. Załóżmy, że X jest przestrzenią Banacha, a T liniowym przekształceniem X w $C[-1, 1]$. Wykaż, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy, gdy ciagłe są wszystkie funkcjonały postaci $x \mapsto \int_a^b Tx(s)ds$, $-1 < a < 0 < b < 1$.

6. Niech x_n będzie słabo zbieżnym do zera ciągiem elementów przestrzeni Banacha X. Wzór $T = (x^*(x_n))_{n=1}^{\infty}$ zadaje wówczas przekształcenie z X^* w c_0. Czy przekształcenie to musi być ciągłe? Czy musi być zwarte?