Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I
gr.1, 10 grudnia 2007

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Załóżmy, że $f \in L_\infty[0,\infty)$ oraz $\lim_{x\to\infty} \int_0^x f(t)g(t)dt$ istnieje dla dowolnej funkcji $g \in L_4[0,\infty)$. Czy wynika stąd, że $\int_0^\infty |f(t)|^{4/3}dt < \infty$?

2. Niech $F := \{f \in L_2[0,2] \colon \int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 t^2 f(t)dt = 0\}$. Oblicz
$$\inf_{f\in F} \int_0^2 |t - f(t)|^2 dt.$$

3. Niech $X = C_{\mathrm{ogr}}(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych ograniczonych na prostej.
a) Wykaż, że $(X, \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią unormowaną.
b) Czy jest to przestrzeń Banacha?
c) Czy X jest przestrzenią ośrodkową?

4. Dla jakich p istnieje niezerowy funkcjonał liniowy ciągły na $L_p[0,1]$, który zeruje się na wszystkich funkcjach ciągłych?

5. Niech $(u_n)_{n\geqslant 1}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy na $\mathcal{H}$ operator T wzorem $Tx := (\frac{n}{n+1}\langle x, u_n\rangle)_{n=1}^\infty$. Wykaż, że T jest operatorem liniowym ciągłym między $\mathcal{H}$ a c_0 i znajdź jego normę.

6. Oblicz normę funkcjonału φ zadanego wzorem
$$\varphi((x_n)_{n\geqslant 1}) = \sum_{n=1}^\infty \Big(-\frac{1}{2}\Big)^n x_n$$
na przestrzeni l_p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Powodzenia!

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I
gr.2, 10 grudnia 2007

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Niech $X = C_{\text{ogr}}([0,\infty))$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji ciągłych ograniczonych na półprostej nieujemnej.
   a) Wykaż, że $(X, \|\cdot\|_\infty)$ jest przestrzenią unormowaną.
   b) Czy jest to przestrzeń Banacha?
   c) Czy X jest przestrzenią ośrodkową?

2. Oblicz normę funkcjonału φ zadanego wzorem
$$\varphi((x_n)_{n\geqslant 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(-\frac{1}{3}\Big)^n x_n$$
   na przestrzeni l_p dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3. Niech $F := \{f \in L_2[0,1] \colon \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^4 f(t)dt = 0\}$. Oblicz
$$\inf_{f\in F} \int_0^1 |t - f(t)|^2 dt.$$

4. Załóżmy, że $f \in L_\infty(\mathbb{R})$ oraz $\lim_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} f(t)g(t)dt$ istnieje dla dowolnej funkcji $g \in L_3(\mathbb{R})$. Czy wynika stąd, że $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^{3/2}dt < \infty$?

5. Niech $(u_n)_{n\geqslant 1}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy na $\mathcal{H}$ operator T wzorem $Tx := (\frac{n}{2n+1}\langle x, u_n\rangle)_{n=1}^{\infty}$. Wykaż, że T jest operatorem liniowym ciągłym między $\mathcal{H}$ a c_0 i znajdź jego normę.

6. Dla jakich p istnieje niezerowy funkcjonał liniowy ciągły na $L_p[-1,1]$, który zeruje się na wszystkich funkcjach ciągłych?

Powodzenia!

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I
gr.3, 10 grudnia 2007

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Czy istnieje niezerowy funkcjonał liniowy ciągły φ na $L_\infty[0,1]$ taki, że $\varphi(I_{[a,b]}) = 0$ dla dowolnego $0 < a < b < 1$?

2. Załóżmy, że $(a_{k,l})_{k,l\geqslant 1}$ jest macierzą taką, że $\sup_l |a_{k,l}| < \infty$ dla każdego k oraz
$$\limsup_{k\to\infty} \Big|\sum_{l=1}^{\infty} a_{k,l}x_l\Big| < \infty, \text{ jeśli } \sum_{l=1}^{\infty} |x_l| < \infty.$$
Wykaż, że $\sup_{k,l} |a_{k,l}| < \infty$.

3. Załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą o.n. przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech
$$y_{2n-1} = \frac{3}{5}x_{2n-1} + \frac{4}{5}x_{2n}, \quad y_{2n} = \frac{4}{5}x_{2n-1} - \frac{3}{5}x_{2n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$
Wykaż, że $(y_n)_{n\geqslant 1}$ jest układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$. Czy jest on zupełny?

4. a) Wykaż, że wzór $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |x^2 f(x)|$ zadaje normę na przestrzeni $C[0,1]$.
b) Czy przestrzeń $C[0,1]$ z powyżej określoną normą jest przestrzenią Banacha?
c) Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

5. Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oblicz normę przekształcenia z $L_p[0,1]$ w l_1 zadanego wzorem
$$Tf = \Big(\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} xf(x)dx\Big)_{n=1}^{\infty}.$$

6. Oblicz
$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-2}^{2} |x^4 - a - bx - cx^2|^2 x^2 dx.$$

Powodzenia!

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I
gr.4, 10 grudnia 2007

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Załóżmy, że $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ jest bazą o.n. przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Niech
$$y_{2n-1} = \frac{4}{5}x_{2n-1} + \frac{3}{5}x_{2n}, \quad y_{2n} = \frac{3}{5}x_{2n-1} - \frac{4}{5}x_{2n} \quad \text{dla } n = 1, 2, \ldots.$$
Wykaż, że $(y_n)_{n\geqslant 1}$ jest układem ortonormalnym w $\mathcal{H}$. Czy jest on zupełny?

2. Dla $1 \leqslant p \leqslant \infty$ oblicz normę przekształcenia z $L_p[0,1]$ w l_1 zadanego wzorem
$$Tf = \Big(\int_{3^{-n}}^{3^{1-n}} x^2 f(x)dx\Big)_{n=1}^{\infty}.$$

3. Załóżmy, że $(a_{n,k})_{n,k\geqslant 1}$ jest macierzą taką, że $\sup_k |a_{n,k}| < \infty$ dla każdego n oraz
$$\limsup_{n\to\infty} \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k}x_k\Big| < \infty, \text{ jeśli } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty.$$
Wykaż, że $\sup_{n,k} |a_{n,k}| < \infty$.

4. Oblicz
$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \int_{-1}^{1} |x^4 - a - bx - cx^2|^2 x^4 dx.$$

5. a) Wykaż, że wzór $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |xf(x)|$ zadaje normę na przestrzeni $C[-1,1]$.
b) Czy przestrzeń $C[-1,1]$ z powyżej określoną normą jest przestrzenią Banacha?
c) Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

6. Czy istnieje niezerowy funkcjonał liniowy ciągły φ na $L_\infty[-1,1]$ taki, że $\varphi(I_{[a,b]}) = 0$ dla dowolnego $-1 < a < b < 1$?

Powodzenia!