Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej 1

13 maja 2016

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać pełne rozwiązanie każdego z nich na osobnej kartce podpisanej u góry imieniem, nazwiskiem i numerem indeksu. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0–10, poza podpunktem iii) zadania 2 za który można dostać dodatkowe 5 punktów. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Znajdź odległość w $L_2([-1,1])$ funkcji $f = (1+x^2)^{-1}$ od przestrzeni
$$X = \left\{ f \in L_2[-1,1] \colon \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0 \right\}.$$

2. Niech $(X, \| \ \|)$ będzie przestrzenią unormowaną. Określmy
$$Y = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} \colon \ x_n \in X, \ \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = 0 \right\}.$$
Połóżmy też $\|(x_n)\|_Y := \sup_n \|x_n\|$. Wykaż, że
i) $(Y, \| \ \|_Y)$ jest przestrzenią unormowaną,
ii) jeśli X jest ośrodkowa, to Y jest ośrodkowa,
iii)* jeśli X jest Banacha, to Y jest Banacha.

3. Niech $(u_n)_{n\geqslant 1}$ będzie układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$. Określmy przekształcenie T na $\mathcal{H}$ wzorem
$$Tx = \left(\frac{1}{\sqrt{n+2}} \sum_{k=n+1}^{3n} \langle x, u_k \rangle \right)_{n\geqslant 1}.$$
Udowodnij, że $Tx \in c_0$ dla $x \in \mathcal{H}$ oraz T jest ciągłym przekształceniem z $\mathcal{H}$ w c_0. Znajdź normę tego przekształcenia.

4. Udowodnij, że
i) jeśli $f \in L_1(\mathbb{R})$ i $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, to $f \in L_p(\mathbb{R})$ dla wszystkich $p \in (1,\infty)$,
ii) jeśli $\sup_{p\in[1,\infty)} \|f\|_{L_p(\mathbb{R})} < \infty$, to $f \in L_\infty(\mathbb{R})$.

5. Niech φ_n będzie ciągiem funkcjonałów liniowych ciągłych na przestrzeni unormowanej X. Wykaż, że następujące warunki są równoważne:
i) $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$,
ii) dla dowolnego zbieżnego do zera ciągu wektorów $x_n \in X$, ciąg $\varphi_n(x_n)$ jest zbieżny do zera.

6. Niech A będzie podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wykaż, że A nie jest liniowo gęsty w X wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcjonał liniowy o normie 1 zerujący się na wszystkich wektorach z A.