Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej

gr.I, 9 maja 2006

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Na przestrzeni $C[0,1]$ rozpatrzmy następujące funkcje:
   a) $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(t)|dt$,
   b) $\|f\|_2 := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)| + \int_0^1 |f(t)|dt$,
   c) $\|f\|_3 := \int_0^1 \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}dt$,
   d) $\|f\|_4 := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|$.
   Które z tych funkcji są normami na $C[0,1]$? Które wprowadzają na $C[0,1]$ strukturę przestrzeni Banacha? Odpowiedź uzasadnij.

2. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $T\colon X \to C[0,1]$ przekształceniem liniowym. Wykaż, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_{t\in[0,1]}\exists_{C(t)<\infty}\forall_{x\in X}\ |\int_0^t T(x)(s)ds| \leqslant C(t)\|x\|.$$

3. Niech
$$X = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty}\colon \|x\| := (\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}|x_n|^4)^{1/4} < \infty\}.$$
   Czy X jest przestrzenią ośrodkową? Jeśli tak, to podaj przykładowy ośrodek. Czy funkcjonał φ zadany wzorem
$$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n2^{-n}x_n$$
   jest funkcjonałem ciągłym na X?

4. Przekształcenie $T\colon L^2[0,1] \to c_0$ jest zadane wzorem
$$Tf := (\int_{2^{-n}}^{2^{1-n}} f(x)dx)_{n=1}^{\infty}.$$
   Czy T jest przekształceniem ciągłym? Oblicz $\|T\|$.

5. Funkcje $f_n \in C[0,1]$ spełniają
$$\forall_{g\in L^1[0,1]}\ \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(t)g(t)dt = 0.$$
   Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$.

6. Zbiór A jest wypukłym domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha X o niepustym wnętrzu. Wykaż, że $A = \overline{\mathrm{Int}(A)}$.

Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej

gr.II, 9 maja 2006

Z podanych zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0-10.

1. Niech
$$X = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty}\colon \|x\| := (\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n}|x_n|^3)^{1/3} < \infty\}.$$
Czy X jest przestrzenią ośrodkową? Jeśli tak, to podaj przykładowy ośrodek. Czy funkcjonał φ zadany wzorem
$$\varphi(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 3^{-n} x_n$$
jest funkcjonałem ciągłym na X?

2. Niech X będzie przestrzenią Banacha, a $T\colon X \to C[0,1]$ przekształceniem liniowym. Wykaż, że T jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_{t\in[0,1]} \exists_{C(t)<\infty} \forall_{x\in X} \ |\int_t^1 T(x)(s)ds| \leqslant C(t)\|x\|.$$

3. Na przestrzeni $C[0,1]$ rozpatrzmy następujące funkcje:
a) $\|f\|_1 := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)|$,
b) $\|f\|_2 := (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$,
c) $\|f\|_3 := \sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |f(t)| + (\int_0^1 |f(t)|^2 dt)^{1/2}$,
d) $\|f\|_4 := \int_0^1 \min(|f(t)|, 1)dt$.
Które z tych funkcji są normami na $C[0,1]$? Które wprowadzają na $C[0,1]$ strukturę przestrzeni Banacha? Odpowiedź uzasadnij.

4. Funkcje $f_n \in C[-1,1]$ spełniają
$$\forall_{g\in L^1[-1,1]} \ \limsup_{n\to\infty} |\int_{-1}^1 f_n(t)g(t)dt| < \infty.$$
Wykaż, że $\sup_n \|f_n\|_\infty < \infty$.

5. Przekształcenie $T\colon L^2[0,1] \to c_0$ jest zadane wzorem
$$Tf := (\int_0^1 x^n f(x)dx)_{n=1}^{\infty}.$$
Czy T jest przekształceniem ciągłym? Oblicz $\|T\|$.

6. Zbiór A jest wypukłym domkniętym podzbiorem przestrzeni Banacha X o niepustym wnętrzu. Wykaż, że $A = \overline{\mathrm{Int}(A)}$.