Kolokwium z Analizy Funkcjonalnej I*

4 grudnia 2012

Spośród poniższych sześciu zadań należy **wybrać pięć** i napisać ich pełne rozwiązania. Każde z zadań będzie oceniane w skali 0-10. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Wykaż, że f_n zbiega słabo do zera w $L_p[0,1]$ dla $1 < p < \infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup_n \|f_n\|_p < \infty$ oraz
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^k f_n(x)dx = 0 \text{ dla } k = 0, 1, 2 \dots .$$

2. Załóżmy, że μ_n są regularnymi miarami zespolonymi na $([-1,1], \mathcal{B}([-1,1]))$ takimi, że
$$\sup_n \mathrm{Re}\Big(\int_{-1}^1 f d\mu_n\Big) < \infty \qquad \text{dla } f \in C[-1,1].$$
Wykaż, że
$$\sup\{|\mu_n(A)|\colon\ A \in \mathcal{B}([-1,1]), n = 1, 2, \dots\} < \infty.$$

3. Niech Y będzie podprzestrzenią przestrzeni Banacha X, zaś $T\colon Y \to l_\infty$ ciągłym odwzorowaniem liniowym. Wykaż, że istnieje przekształcenie liniowe $S\colon X \to l_\infty$ takie, że $S_{|Y} = T$ oraz $\|S\| = \|T\|$.

4. Niech $(f_n)_{n\geqslant 1}$ będzie bazą o.n. przestrzeni $L_2[0,1]$.
a) Oblicz
$$\sum_{n=1}^\infty \Big|\int_0^t x^3 f_n(x)dx\Big|^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$
b) Przyjmując, że $f_n(t) = 0$ dla $t \notin [0,1]$ wykaż, że $(f_n(\cdot - k))_{n\geqslant 1, k\geqslant 0}$ jest bazą o.n. $L_2[0,\infty)$.

5. Określmy
$$X := \Big\{f \in C^1(\mathbb{R})\colon \int_{-\infty}^\infty |f'(x)|dx < \infty\Big\}.$$
Wykaż, że X z normą $\|f\| = |f(0)| + \int_{-\infty}^\infty |f'(x)|dx$ jest przestrzenią unormowaną. Czy jest to przestrzeń Banacha? Czy jest to przestrzeń ośrodkowa?

6. Zbiór A jest zwartym podzbiorem przestrzeni Banacha X. Wykaż, że $\overline{\mathrm{conv}(A)}$ jest zwarty. Czy zbiór $\mathrm{conv}(A)$ musi być zwarty?