KOLOKWIUM Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ

grupa I, 14.15-15.45, 14 stycznia 2000

1. Dla funkcji $f \in C[0,1]$ i $p \in [1,\infty)$ zdefiniujmy operator $T_f : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ wzorem $T_f g = fg$. Udowodnij, że $\|T_f\| = \|f\|_\infty$. Dla jakich funkcji f operator T_f jest odwracalny, jak wygląda T_f^{-1}?

2. Które z następujących przestrzeni są przestrzeniami Banacha w normie $\|(a_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$:
a)$X_1 = \{(a_n) \in l_1 : \limsup_{n\to\infty} |na_n| = 0\}$
b)$X_2 = \{(a_n) \in l_1 : a_1 a_2 = a_3 a_4\}$
c)$X_3 = \{(a_n) \in l_1 : a_1 + a_2 = a_3 + a_4\}$?

3. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Udowodnij, że przekształcenie liniowe $T : X \to C[0,1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_{t\in[0,1]} \ \exists_{C(t)<\infty} \ |Tx(t)| \leq C(t)\|x\| \text{ dla wszystkich } x \in X.$$

4. Ciąg funkcji $f_n \in L^2[0,1]$ spełnia następujący warunek
$$\forall_{g\in L^2[0,1]} \ \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)g(x)dx = 0.$$
Wykaż, że $\sup_n \int_0^1 f_n^2 dx < \infty$. Czy ponadto musi zachodzić
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n^2 dx = 0?$$

5. Ciąg wektorów x_i, $i = 1, 2, \ldots$ jest bazą o.n. przestrzeni l^2. Zdefiniujmy wektory y_i wzorami $y_{2k-1} = \frac{1}{2}(x_{2k-1} + x_{2k})$ i $y_{2k} = \frac{1}{2}(x_{2k-1} - x_{2k})$ dla $k = 1, 2, \ldots$.
a) Czy (y_i) jest układem ortogonalnym w l^2, czy jest ortonormalny?
b) Czy (y_i) jest bazą l^2?
c) Oblicz normę wektora $u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} y_i$.

6. Operator $T : L^2[0,1] \to l^1$ jest dany wzorem
$$Tf = \left(\int_{2^{-n}}^{2^{-n+1}} f(x)dx\right)_{n=1,2,\ldots}$$
a) Udowodnij, że T jest dobrze określony tzn $Tf \in l^1$ dla $f \in L^2[0,1]$
b) Znajdź $\|T\|$, czy T jest ciągły?
c) Między jakimi przestrzeniami działa operator sprzężony T^*, podaj wzór na T^*.

KOLOKWIUM Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ
grupa II 14.15-15.45, 14 stycznia 2000

1. Które z następujących przestrzeni są przestrzeniami Banacha w normie $\|(a_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$:
a)$X_1 = \{(a_n) \in l_1 : \limsup_{n\to\infty} |n^2 a_n| = 0\}$
b)$X_2 = \{(a_n) \in l_1 : a_1 = a_2 + a_3\}$
C)$X_3 = \{(a_n) \in l_1 : a_1^2 = a_2 a_3\}$?

2. Ciąg funkcji $g_n \in L^2[0,\infty)$ spełnia następujący warunek
$$\forall_{f \in L^2[0,\infty)} \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} f(x) g_n(x) dx = 0.$$
Wykaż, że $\sup_n \int_0^{\infty} g_n^2 dx < \infty$. Czy ponadto musi zachodzić
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} g_n^2 dx = 0?$$

3. Dla funkcji $f \in C[0,1]$ zdefiniujmy operator $T_f : L^4[0,1] \to L^4[0,1]$ wzorem $T_f g = fg$. Udowodnij, że $\|T_f\| = \|f\|_{\infty}$. Dla jakich funkcji f operator T_f jest odwracalny, jak wygląda T_f^{-1}?

4. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Udowodnij, że przekształcenie liniowe $T : X \to C[0,1]$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_{t\in[0,1]} \exists_{C(t)<\infty} |Tx(t)| \le C(t)\|x\| \text{ dla wszystkich } x \in X.$$

5. Operator $T : L^2[0,1] \to l^1$ jest dany wzorem
$$Tf = (\int_{3^{-n}}^{3^{-n+1}} f(x)dx)_{n=1,2,\ldots}$$
a) Udowodnij, że T jest dobrze określony tzn $Tf \in l^1$ dla $f \in L^2[0,1]$
b) Znajdź $\|T\|$, czy T jest ciągły?
c) Między jakimi przestrzeniami działa operator sprzężony T^*, podaj wzór na T^*.

6. Ciąg wektorów x_i, $i = 1,2,\ldots$ jest bazą o.n. przestrzeni l^2. Zdefiniujmy wektory y_i wzorami $y_{2k-1} = \frac{1}{3}(x_{2k-1} + 2x_{2k})$ i $y_{2k} = \frac{1}{3}(2x_{2k-1} - x_{2k})$ dla $k = 1,2,\ldots$.
a) Czy (y_i) jest układem ortogonalnym w l^2, czy jest ortonormalny?
b) Czy (y_i) jest bazą l^2?
c) Oblicz normę wektora $u = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i} y_i$.

KOLOKWIUM Z ANALIZY FUNKCJONALNEJ
grupa 16.00-17.30, 14 stycznia 2000

1. Niech X będzie przestrzenią Banacha. Udowodnij, że przekształcenie liniowe $T : X \to l^p$ jest ciągłe wtedy i tylko wtedy gdy
$$\forall_n \ \exists_{C(n)<\infty} \ |(Tx)_n| \leq C(t)\|x\| \text{ dla wszystkich } x \in X.$$
(Uwaga: $(Tx)_n$ oznacza n-ta współrzędną wektora Tx)

2. Dla funkcji $f \in C[0,1]$ zdefiniujmy operator $T_f : L^1[0,1] \to L^1[0,1]$ wzorem $T_f g = fg$. Udowodnij, że $\|T_f\| = \|f\|_\infty$. Dla jakich funkcji f operator T_f jest odwracalny, jak wygląda T_f^{-1}?

3. Które z następujących przestrzeni są przestrzeniami Banacha w normie $\|(a_n)\| = \sup_n |a_n|$:
a)$X_1 = \{(a_n) \in c_0 : \limsup_{n\to\infty} |na_n| = 0\}$
b)$X_2 = \{(a_n) \in l_1 : a_1 a_2 = 0\}$
c)$X_3 = \{(a_n) \in l_1 : a_1 + a_2 = 0\}$?

4. Ciąg funkcji $f_n \in L^2[-1,1]$ spełnia następujący warunek
$$\forall_{g\in L^2[0,1]} \lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n(x)g(x)dx = 0.$$
Wykaż, że $\sup_n \int_{-1}^{1} f_n^2 dx < \infty$. Czy ponadto musi zachodzić
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} f_n^2 dx = 0?$$

5. Ciąg wektorów x_i, $i = 1, 2, \ldots$ jest bazą o.n. przestrzeni l^2. Zdefiniujmy wektory y_i wzorami $y_{3k-2} = \frac{1}{2}(x_{3k-2} + x_{3k-1})$ $y_{3k-1} = \frac{1}{2}(x_{3k-2} - x_{3k-1})$ i $y_{3k} = x_{3k}$ dla $k = 1, 2, \ldots$.
a) Czy (y_i) jest układem ortogonalnym w l^2, czy jest ortonormalny?
b) Czy (y_i) jest bazą l^2?
c) Oblicz normę wektora $u = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} y_i$.

6. Operator $T : L^2[0,1] \to c_0$ jest dany wzorem
$$Tf = (\int_{1-2^{-n+1}}^{1-2^{-n}} f(x)dx)_{n=1,2,\ldots}$$
a) Udowodnij, że T jest dobrze określony tzn $Tf \in c_0$ dla $f \in L^2[0,1]$
b) Znajdź $\|T\|$, czy T jest ciągły?
c) Między jakimi przestrzeniami działa operator sprzężony T^*, podaj wzór na T^*.