

### Kartkówka 3

gr.1, 14 stycznia 2008

1. Jaki warunek musi spełniać ciąg  $a_n$ , by funkcje  $f_n = a_n I_{[0,1/n]}$  zbiegały słabo do zera
  - a) w  $L_1[0, 1]$
  - b) w  $L_2[0, 1]$ ?
2. Załóżmy, że  $Tx = (T_1x, T_2x, \dots)$  oraz  $T$  jest operatorem liniowym między przestrzenią Banacha  $X$  a  $c_0$ . Wykaż, że  $T$  jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $n$ ,  $x \rightarrow \sum_{i=1}^n T_i x$  jest ciągłym funkcjonałem na  $X$ .

### Kartkówka 3

gr.2, 14 stycznia 2008

1. Załóżmy, że  $Tx = (T_1x, T_2x, \dots)$  oraz  $T$  jest operatorem liniowym między przestrzenią Banacha  $X$  a  $l_1$ . Wykaż, że  $T$  jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $n$ ,  $x \rightarrow \sum_{i=1}^n T_i x$  jest ciągłym funkcjonałem na  $X$ .
2. Jaki warunek musi spełniać ciąg  $a_n$ , by funkcje  $f_n = n I_{[0, a_n]}$  zbiegały słabo do zera
  - a) w  $L_1[0, 1]$
  - b) w  $L_2[0, 1]$ ?

### Kartkówka 3

gr.3, 14 stycznia 2008

1. Wykaż, że operator  $T$  dany wzorem

$$Tx = (x_1, \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \dots)$$

jest zwartym operatorem z  $l_1$  w  $c_0$ .

2. Załóżmy, że  $T$  jest operatorem liniowym między przestrzenią Banacha  $X$  a  $C[0, 1]$ . Wykaż, że  $T$  jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $t \in [0, 1]$ ,  $x \rightarrow \int_0^t Tx(s)ds$  jest ciągłym funkcjonałem na  $X$ .

### Kartkówka 3

gr.4, 14 stycznia 2008

1. Załóżmy, że  $T$  jest operatorem liniowym między przestrzenią Banacha  $X$  a  $C[0, 1]$ . Wykaż, że  $T$  jest ciągły wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego  $t \in [0, 1]$ ,  $x \rightarrow \int_t^1 Tx(s)ds$  jest ciągłym funkcjonałem na  $X$ .
2. Wykaż, że operator  $T$  dany wzorem

$$Tx = (x_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2), \frac{1}{\sqrt{3}}(x_1 + x_2 + x_3), \dots)$$

jest zwartym operatorem z  $l_1$  w  $c_0$ .