Kartkówka 2

gr.1, 18 kwietnia 2016

1. Załóżmy, że $(u_n)_{n\geqslant 1}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a x wektorem długości 1 w $\mathcal{H}$. Niech $I_k = \{n \geqslant 1\colon |\langle x, u_n\rangle| \geqslant 2^{-k}\}$. Wykaż, że
   i) $|I_0| \leqslant 1$ oraz $|I_0| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \lambda u_n$ dla pewnego n i $|\lambda| = 1$,
   ii) $2^{-2k}|I_k| \leqslant 1$ oraz $\lim_{k\to\infty} 2^{-2k}|I_k| = 0$.

2. Znajdź w $L_2[-2,2]$ odległość funkcji $f(t) = (t-3)^2$ od podprzestrzeni funkcji parzystych z $L_2[-2,2]$.

Kartkówka 2

gr.2, 18 kwietnia 2016

1. Znajdź w $L_2[-3,3]$ odległość funkcji $f(t) = (t+2)^2$ od podprzestrzeni funkcji parzystych z $L_2[-3,3]$.

2. Załóżmy, że $(u_n)_{n\geqslant 1}$ jest układem ortonormalnym w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$, a x wektorem długości 1 w $\mathcal{H}$. Niech $I_k = \{n \geqslant 1\colon |\langle x, u_n\rangle| \geqslant 3^{-k}\}$. Wykaż, że
   i) $|I_0| \leqslant 1$ oraz $|I_0| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = \lambda u_n$ dla pewnego n i $|\lambda| = 1$,
   ii) $3^{-2k}|I_k| \leqslant 1$ oraz $\lim_{k\to\infty} 3^{-2k}|I_k| = 0$.