Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej I
grupa I, 2 lutego 2008

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i pełne rozwiązanie każdego z wybranych zadań napisać na osobnej kartce podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy i zadania. Za podpunkty oznaczone gwiazdką można zdobyć dodatkowe punkty. Można korzystać z faktów z wykładu i ćwiczeń pod warunkiem ich dokładnego sformułowania.

1. (8pkt) a) Czy przestrzeń funkcji $C[0,1]$ z normą $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$ jest przestrzenią unormowaną? Czy jest to przestrzeń Banacha? Czy jest ośrodkowa?
   b*) Czy istnieje norma na przestrzeni wszystkich wielomianów, która zadaje strukturę przestrzeni Banacha?

2. (8pkt) Wektory u_n z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ spełniają warunek
$$\lim_{n\to\infty} \langle x, u_n \rangle = 0 \text{ dla wszystkich } x \in \mathcal{H}.$$
   Wykaż, że przekształcenie $x \to (\langle x, u_n \rangle)_{n\geqslant 0}$ jest ciągłe z $\mathcal{H}$ w c_0.

3. (8pkt) Niech
$$X_0 := \{x = (x_n)_{n\geqslant 1} \in l_2 \colon x_1 + 2x_2 = 0, 2x_3 - x_4 = 0, x_i = 0 \text{ dla } i \geqslant 5\}.$$
   Czy X_0 jest domkniętą podprzestrzenią l_2? Znajdź odległość wektora $(1, 1/2, 1/4, \ldots)$ od X_0.

4. (8pkt) Na przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ określamy operator T wzorem $Tf(x) = e^{-|x|}f(x+1)$.
   a) Czy T jest ciągły? Oblicz $\|T\|$.
   b) Znajdź operator hilbertowsko sprzężony T^* i oblicz jego normę.

5. (8pkt) Niech
$$Tf(x) = \Big(\int_{3^{-n}}^{2^{-n}} f(x)dx\Big)_{n=1}^{\infty}, \quad f \in C[0,1].$$
   a) Wykaż, że T jest ciągłym operatorem z $C[0,1]$ w c_0.
   b) Czy T jest zwarty?
   c*) Wykaż, że każdy zwarty operator o wartościach w c_0 jest granicą w normie operatorów skończenie wymiarowych.

6. (8pkt) Określmy ciąg przekształceń $T_n \in B(l_4, l_4)$ wzorem $T_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$. Czy
   a) $\|T_n\| \to 0$,
   b) $\|T_n x\| \to 0$ dla każdego $x \in l_4$,
   c) $\|T_n^* \varphi\| \to 0$ dla każdego $\varphi \in l_4^*$?

Część testowa

Proszę uzupełnić wykropkowane miejsca i podać odpowiedzi na zadane pytania.

1. (4pkt) $\mathrm{Id}\colon L_p[-1,2] \to L_q[-1,2]$ jest dobrze określona i ciągła wtedy i tylko wtedy gdy ....

   Ponadto $\|\mathrm{Id}\|_{L_p[-1,2]\to L_q[-1,2]} =$ ....

2. (3pkt) Podaj przykład bazy ortonormalnej przestrzeni $L_2[-1,1]$.

3. (3pkt) Sformułuj twierdzenie o diagonalizacji operatorów zwartych samosprzężonych dla ośrodkowych przestrzeni Hilberta nieskończonego wymiaru.

4. (4pkt) Niech $f_n = a_n I_{[n,2n]}$. Wówczas f_n

   i) zbiega w normie do zera w $L_4([0,\infty))$ wtedy i tylko wtedy gdy ....

   ii) zbiega słabo do zera w $L_4([0,\infty))$ wtedy i tylko wtedy gdy ....

5. (3pkt) Niech

$$X = \Big\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty}\colon \|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} n|x_n|^3\Big)^{1/3} < \infty\Big\}.$$

   Wówczas X jest przestrzenią (podkreśl prawidłowe odpowiedzi):

   unormowaną, Banacha, Hilberta, ośrodkową, izometryczną z l_3.

6. (3pkt) Niech X będzie przestrzenią z poprzedniego zadania oraz dla $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ i $x \in X$, $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Wówczas $\varphi_y \in X^*$ wtedy i tylko wtedy gdy ....

   Ponadto $\|\varphi_y\|_{X^*} =$

7. (4pkt) Operator $T\colon l_2 \to l_2$ jest dany wzorem $Tx = (x_1 - 2x_2, 2x_1 + x_2, ix_3, ix_4, \ldots)$. Wówczas $\sigma(T) =$ .... oraz $\sigma(T^*) =$ ....

8. (4pkt) Niech $T\colon l_2 \to l_1$

$$Tx = \Big(x_1 + \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{8}x_4, \ldots\Big).$$

   Wówczas T^* działa z przestrzeni ..... w przestrzeń ...... i ma postać

$$T^*y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

9. (2pkt) Podaj definicję operatora zwartego.

Imię i nazwisko:... Numer indeksu:........................

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej I
grupa II, 2 lutego 2008

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać pięć** i pełne rozwiązanie każdego z wybranych zadań napisać na osobnej kartce podpisanej imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu, numerem grupy i zadania. Za podpunkty oznaczone gwiazdką można zdobyć dodatkowe punkty. Można korzystać z faktów z wykładu i ćwiczeń pod warunkiem ich dokładnego sformułowania.

1. (8pkt) Niech
$$Tf(x) = \Big(\int_{5^{-n}}^{3^{-n}} f(x)dx\Big)_{n=1}^{\infty}, \quad f \in C[0,1].$$
a) Wykaż, że T jest ciągłym operatorem z $C[0,1]$ w c_0.
b) Czy T jest zwarty?
c*) Wykaż, że każdy zwarty operator o wartościach w c_0 jest granicą w normie operatorów skończenie wymiarowych.

2. (8pkt) Niech
$$X_0 := \{x = (x_n)_{n \geqslant 1} \in l_2 \colon 3x_1 + x_2 = 0, x_3 - 3x_4 = 0, x_i = 0 \text{ dla } i \geqslant 5\}.$$
Czy X_0 jest domkniętą podprzestrzenią l_2? Znajdź odległość wektora $(1, 1/3, 1/9, \ldots)$ od X_0.

3. (8pkt) Na przestrzeni $L_2(\mathbb{R})$ określamy operator T wzorem $Tf(x) = \operatorname{arctg}(x)f(x-1)$.
a) Czy T jest ciągły? Oblicz $\|T\|$.
b) Znajdź operator hilbertowsko sprzężony T^* i oblicz jego normę.

4. (8pkt) a) Czy przestrzeń funkcji $C[-1,1]$ z normą $\|f\| = (\int_{-1}^{1} |f(x)|^3 dx)^{1/3}$ jest przestrzenią unormowaną? Czy jest to przestrzeń Banacha? Czy jest ośrodkowa?
b*) Czy istnieje norma na przestrzeni wszystkich wielomianów, która zadaje strukturę przestrzeni Banacha?

5. (8pkt) Określmy ciąg przekształceń $T_n \in B(l_3, l_3)$ wzorem $T_n x = (x_{2n+1}, x_{2n+2}, \ldots)$. Czy
a) $\|T_n\| \to 0$,
b) $\|T_n x\| \to 0$ dla każdego $x \in l_3$,
c) $\|T_n^* \varphi\| \to 0$ dla każdego $\varphi \in l_3^*$?

6. (8pkt) Wektory u_n z przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ spełniają warunek
$$\lim_{n\to\infty} \langle x, u_n \rangle = 0 \text{ dla wszystkich } x \in \mathcal{H}.$$
Wykaż, że przekształcenie $x \to (\langle x, u_n \rangle)_{n \geqslant 0}$ jest ciągłe z $\mathcal{H}$ w c_0.

Część testowa

Proszę uzupełnić wykropkowane miejsca i podać odpowiedzi na zadane pytania.

1. (3pkt) Niech

$$X = \Big\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \colon \|x\| = \Big(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)|x_n|^4 \Big)^{1/4} < \infty \Big\}.$$

Wówczas X jest przestrzenią (podkreśl prawidłowe odpowiedzi):
unormowaną, Banacha, izometryczną z l_4, Hilberta, ośrodkową.

2. (3pkt) Niech X będzie przestrzenią z poprzedniego zadania oraz dla $y = (y_n)_{n=1}^{\infty}$ i $x \in X$, $\varphi_y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$. Wówczas $\varphi_y \in X^*$ wtedy i tylko wtedy gdy ....
Ponadto $\|\varphi_y\|_{X^*} =$

3. (3pkt) Podaj przykład bazy ortonormalnej przestrzeni $L_2[0,5]$.

4. (2pkt) Podaj definicję operatora zwartego.

5. (4pkt) $\mathrm{Id} \colon L_p[0,2] \to L_q[0,2]$ jest dobrze określona i ciągła wtedy i tylko wtedy gdy ....
Ponadto $\|\mathrm{Id}\|_{L_p[0,2] \to L_q[0,2]} =$ ....

6. (4pkt) Niech $T \colon l_2 \to c_0$

$$Tx = \Big(x_1 - \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{4}x_3, \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{8}x_4, \ldots \Big).$$

Wówczas T^* działa z przestrzeni ..... w przestrzeń ...... i ma postać

$$T^*y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

7. (4pkt) Niech $f_n = a_n I_{[\sqrt{n}, n]}$. Wówczas f_n
i) zbiega w normie do zera w $L_3([0,\infty))$ wtedy i tylko wtedy gdy ....
ii) zbiega słabo do zera w $L_3([0,\infty))$ wtedy i tylko wtedy gdy ....

8. (4pkt) Operator $T \colon l_2 \to l_2$ jest dany wzorem $Tx = (2x_1 - 3x_2, 3x_1 + 2x_2, ix_3, ix_4, \ldots)$. Wówczas $\sigma(T) =$ .... oraz $\sigma(T^*) =$ ....

9. (3pkt) Sformułuj twierdzenie o diagonalizacji operatorów zwartych samosprzężonych dla ośrodkowych przestrzeni Hilberta nieskończonego wymiaru.