Imię i nazwisko:.. Numer indeksu:........................

Egzamin z Analizy Funkcjonalnej I*
1 lutego 2013

Część zadaniowa

Spośród poniższych zadań należy **wybrać cztery** i napisać ich pełne rozwiązania na osobnych kartkach podpisanych imieniem, nazwiskiem, numerem indeksu i zadania. Każde zadanie będzie oceniane w skali 0–10 pkt. Można (i należy) wykorzystywać fakty udowodnione na wykładzie i ćwiczeniach.

1. Załóżmy, że T jest ciągłym operatorem liniowym na przestrzeni Banacha X. Określmy
$$e^T = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$
Udowodnij, że
a) powyższy szereg jest zbieżny w normie operatorowej;
b) e^T jest granicą w normie operatorowej ciągu $(\mathrm{Id} + \frac{T}{n})^n$;
c) e^T jest odwracalny i $(e^T)^{-1} = e^{-T}$;
d) $e^T - \mathrm{Id}$ jest zwarty, jeśli T jest zwarty.

2. Niech X będzie przestrzenią unormowaną oraz
$$Y := \Big\{(x_n)_{n=1}^{\infty}\colon\ x_n \in X,\ \|(x_n)\| := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2\Big)^{1/2} < \infty\Big\}$$
Wykaż, że
a) Y jest przestrzenią unormowaną;
b) Y jest ośrodkowe wtedy i tylko wtedy, gdy X jest ośrodkowe;
c) Y jest Banacha wtedy i tylko wtedy, gdy X jest Banacha;
d) Y jest przestrzenią Hilberta, jeśli X jest przestrzenią Hilberta.

3. Operator $T\colon L_1[0,\infty) \to l_2$ jest dany wzorem
$$Tf = \Big(\int_{n-1}^{n} f(x)dx\Big)_{n=1}^{\infty}.$$
a) Wykaż, że T jest ciągły i oblicz $\|T\|$.
b) Znajdź T^* i oblicz $\|T^*\|$.
c) Czy T jest operatorem zwartym?

4. Operator T na przestrzeni $C[-2,2]$ jest dany wzorem
$$Tf(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{dla } x \in [-2,-1] \\ xf(x) & \text{dla } x \in [-1,0] \\ \int_0^x f(y)dy & \text{dla } x \in [0,2]. \end{cases}$$
a) Oblicz $\|T\|$.
b) Znajdź wartości własne T.
c) Znajdź widmo T. (*Wskazówka.* Operator T „obcięty” do $C[0,2]$ jest zwarty.)

5. Załóżmy, że T jest liniowym przekształceniem przestrzeni Banacha X w $C[0,1]$ takim, że dla każdego $n = 0,1,2,\dots$ przekształcenie $x \mapsto \int_0^1 t^n Tx(t)dt$ jest ciągłym funkcjonałem liniowym na X. Czy wynika stąd, że przekształcenie T jest ciągłe?

Część testowa

1. (3pkt) Sformułuj twierdzenie o postaci zwartego operatora na ośrodkowej przestrzeni Hilberta nieskończonego wymiaru.

2. (5pkt) a) Podaj definicję transformaty Fouriera

   $\hat{f}(t) =$ ....

   b) Dla $f(x) = e^{-2x^2} \sin x$, $\hat{f}(t) =$......................................
   c) Jeśli $\hat{f}(t) = e^{-|t|}$, to $f(x) =$..

3. (3pkt) Kula jednostkowa w $L_p[0,1]$ jest zwarta w słabej topologii wtedy i tylko wtedy, gdy ....

4. (3pkt) Niech $f_n = a_n I_{[n,2n]}$. Wówczas f_n
   zbiega w normie do zera w $L_4([0,\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ....
   zbiega słabo do zera w $L_4([0,\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ....

5. (3pkt) Sformułuj twierdzenie Banacha-Steinhausa.

6. (3pkt) Podaj przykład operatora samosprzężonego na l_2, którego widmo jest równe $[0,1]$. Czy operator taki może być zwarty?

7. (4pkt) Niech
$$M := \Big\{ f \in L_2[0,\infty) \colon \int_n^{n+1} x f(x) = 0, n = 0,1,2,\ldots \Big\}.$$
   Wówczas $M^{\perp} =$ .... oraz $P_M(e^{-x}) =$ ....

8. (3pkt) Podaj przykład bazy ortonormalnej przestrzeni $L_2([0,\infty))$.

9. (3pkt) Opisz przestrzeń sprzężoną do $C[0,1]$.