Zadania z RP2. Seria 1. **Warunkowa wartość oczekiwana.**

Zad 1. W schemacie Bernouliego oblicz wartość oczekiwaną liczby rzutów przeprowadzanych aż do wypadnięcia

1. dwóch sukcesów
2. dwóch sukcesów i porażki.

Zad 2. Pokaż, że jeśli Y jest ograniczoną zmienną losową $\mathcal{F}$ mierzalną, to

$$\mathbf{E}(XY|\mathcal{F}) = Y\mathbf{E}(X|\mathcal{F}).$$

Zad 3. Udowodnij warunkową nierówność Jensena. Jeśli funkcja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest wypukła, a zmienne losowe X i $\varphi(X)$ są klasy L^1

$$\varphi(\mathbf{E}(X|\mathcal{F})) \leqslant \mathbf{E}(\varphi(X)|\mathcal{F}), \quad \text{p.n.}$$

Zad 4. Niech Y będzie zmienną losową o wartościach w $\mathbb{R}^n$, X - zmienną losową mierzalną względem $\sigma(Y)$. Wówczas istnieje funkcja borelowska $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ taka, że $X = h(Y)$.

Zad 5. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, f - funkcją borelowską. Wykazać, że

$$\mathbf{E}(f(X,Y)|Y=t) = \mathbf{E}f(X,t).$$

Zad 6. Definiujemy warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbf{D}^2(X|\mathcal{F}) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F}).$$

Pokazać, że $\mathbf{D}^2(X) = \mathbf{E}(\mathbf{D}^2(X|\mathcal{F})) + \mathbf{D}^2(\mathbf{E}(X|\mathcal{F}))$.

Zad 7. Niech $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, $\mathbf{P}$ - miara Lebesgue'a na $[0,1] \times [0,1]$. Znaleźć $\mathbf{E}(f|\mathcal{F})$, jeśli

1. $f(x,y) = x$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez y;
2. $f(x,y) = x - y$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez $x + y$;
3. $f(x,y) = x^2 y$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez y.

Zad 8. X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X|X+Y)$.

Zad 9. Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, $\mathbf{E}|X_1| < \infty$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X_1|\mathcal{F}_n)$, $\mathbf{E}(\sum_{i=1}^n a_i X_i|\mathcal{F}_n)$, gdzie

$$S_n = X_1 + ... + X_n, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, ...), \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Zad 10. Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$, jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie: a) $\mathcal{N}(0, \lambda^2)$, b) wykładniczym z parametrem λ, c) Poissona z parametrem λ.

Zad 11. Udowodnić (nie korzystając z gęstości warunkowych), że jeśli X, Y ma rozkład normalny o średniej 0, to

$$\mathbf{E}(X|Y) = \frac{\mathbf{E}XY}{\mathbf{E}Y^2} Y.$$