Zadania z RP 1. Seria 8. **Rozkłady wielowymiarowe**

Zad 1 *Udowodnić, że jeśli wektor losowy X o wartościach w $\mathbb{R}^n$ ma rozkłady ciągły z gęstością f, S jest otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, takim, że $\mathbf{P}(X \in S) = 1$, $\varphi : S \to \mathbb{R}^n$ jest wzajemnie jednoznacznym odwzorowaniem klasy C^1, $J_\varphi \neq 0$, to gęstość zmiennej losowej $Y = \varphi(X)$ ma postać*

$$g(y) = f(\varphi^{-1}(Y))|J_{\varphi^{-1}}(y)|, \quad y \in \varphi(S).$$

Zad 2 *Znaleźć rozkład łączny $Y_1 = (\cos t)X_1 + (\sin t)X_2$, $Y_2 = (\sin t)X_1 - (\cos t)X_2$, jeśli*

- $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{array}\right))$
- $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(0, \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right))$

Zad 3 *Znajdź rozkład zmiennych $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$, gdzie X, Y niezależne o rozkładzie wykładniczym $\lambda > 0$.*

Zad 4 *Znajdź gęstość zmiennej $Z = X+Y$, gdzie wektor (X, Y) ma gęstość $f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)\exp(-(x+y))1_{\{x,y>0\}}$.*

Zad 5 *Niech X ma rozkład o ciągłej dystrybuancie F. Pokaż, że n-ta statystyka pozycyjna ma dystrybuantę $F_{n:k} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}(F(t))^i(1 - F(t))^{n-i}$.*

Zad 6 *Niech $U = (U_{n:1}, ..., U_{n:n})$ będzie wektorem statystyk pozycyjnych. Wykaż, że U rozkład jednostajny na simpleksie $\triangle_n = \{(x_1, ..., x_n) :\ 0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}U_{n:k}$.*

Zad 7 *Niech r_n będzie ciągiem niezależnych zmiennych Rademachera, tzn. $\mathbf{P}(r_n = \pm 1) = 1/2$. Pokaż, że*

$$\mathbf{P}((a_1 r_1 + ... + a_n r_n) > t\sqrt{n}) < \exp(-t^2/(2\|a\|_2^2)),$$

gdzie $\|a\| = \sqrt{a_1^2 + ... a_n^2}$.

Zad 8 *Podać przykład nieskorelowanych zmiennych gaussowskich X, Y które nie są niezależne.*

Zad 9 *Udowodnij, że jeśli wektor $(X_1, ..., X_n)$ ma gęstość gaussowską, to z nieskorelowania wynika niezależność zmiennych $(X_1, ..., X_n)$.*

Zad 10 *Pokaż, że dla każdej rosnącej, różniczkowalnej funkcji φ takiej, że $\varphi(0) = 0$ zachodzi wzór*

$$\mathbf{E}\varphi(X) = \int_0^\infty \varphi'(t)\mathbf{P}(X > t)dt.$$

Zad 11 *Wykaż, że w szczególności jeśli $\mathbf{P}(X \in \mathbb{N}) = 1$, to*

$$\mathbf{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

Zad 12 *Podaj przykład dwóch funkcji ciągłych, różnych od stałej, określonych na przedziale $\Omega = [0, 1]$, które potraktowane jako zmienne losowe ($\mathbf{P} = |\cdot|$-miara Lebesgue'a na $[0, 1]$) są niezależne. Czy takie funkcje mogą mieć wahanie skończone.*