Zadania z RP 1. Seria 7. **Rozkłady prawdopodobieństwa**

Definicja 1 *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej X nazywamy* $\mathbf{E}X := \int_\Omega X(\omega)\mathbf{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} x\mu_X(dx)$. *W przypadku zmiennej losowej dyskretnej* $\mathbf{E}X = \sum_{x\in S} x\mu_X(\{x\})$, *gdzie S jest przeliczalnym zbiorem wartości* $\mu_X(S) = 1$. *W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$ mamy* $\mathbf{E}X = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$.

Definicja 2 *Wariancją zmiennej losowej X nazywamy*

$$\mathbf{D}^2X := \int_\Omega [X(\omega) - \mathbf{E}X]^2\mathbf{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} [x - \mathbf{E}X]^2\mu_X(dx)$$

W przypadku zmiennej losowej dyskretnej $\mathbf{D}^2X = \sum_{x\in S}(x - \mathbf{E}X)^2\mu_X(\{x\})$. *W przypadku zmiennej losowej ciągłej o gęstości $f(x)$ mamy* $\mathbf{D}^2X = \int_{\mathbb{R}}(x - \mathbf{E}X)^2 f(x)dx$.

Definicja 3 *Zmienne $X_1, ..., X_n$ określone na $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ nazywamy niezależnymi jeśli*

$$\mathbf{P}(X \in B_1, ..., X \in B_n) = \mathbf{P}(X \in B_1)...\mathbf{P}(X \in B_n), \ \ \forall\, B_1, B_2, ..., B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

W przypadku zmiennych dyskretnych $X_1, ..., X_n$ o przeliczalnych zbiorach wartości $S_1, ..., S_n$ oznacza to, że $\mathbf{P}(X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) = \mathbf{P}(X_1 = x_1)...\mathbf{P}(X_n = x_n)$, *dla każdego $x_1 \in S_1, ..., x_n \in S_n$. W przypadku zmiennych ciągłych $X_1, ..., X_n$ o gęstościach $f_1, ..., f_n$, zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy gdy zmienna $(X_1, ..., X_n)$ ma rozkład ciągły z gęstością*

$$f(x_1, ..., x_n) = f_1(x_1)...f_n(x_n), \ \ x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}.$$

Twierdzenie 1 *Dla dowolnych zmiennych $X_1, ..., X_n$,* $\mathbf{E}(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{E}X_1 + ...\mathbf{E}X_n$. *Jeśli zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezależne, to* $\mathbf{D}^2(X_1 + ... + X_n) = \mathbf{D}^2X_1 + ... + \mathbf{D}^2X_n$.

Zad 1 *Udowodnij, że* $\mathbf{D}^2X = \mathbf{E}X^2 - (\mathbf{E}X)^2$. *Zauważ, że* $\mathbf{D}^2X = \mathbf{D}^2(X - \mathbf{E}X)$.

Zad 2 *Przykład, że Twierdzenie 1 przydaje się. Niech X oznacza sumę oczek uzyskaną w stukrotnym rzucie kostką. Pokaz, że* $\mathbf{E}X = 350$.

Zad 3 *Niech X ma rozkład jednopunktowy δ_a zadany wzorem* $\mathbf{P}(X = a) = 1$. *Pokaż, że* $\mathbf{E}X = a$, $\mathbf{D}^2X = 0$.

Zad 4 *Niech X ma rozkład Bernouliego $\mathcal{B}(n, p)$ zadany wzorem* $\mathbf{P}(X = k)\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, $p + q = 1$. *Pokaz, że* $\mathbf{E}X = np$, $\mathbf{D}^2X = npq$.

Zad 5 *Wykonujemy doświadczenia Bernouliego, aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X oznacza liczbę wykonanych doświadczeń. Pokaż, że* $\mathbf{E}X = 1/p$, $\mathbf{D}^2X = q/p^2$.

Zad 6 *Przypuśćmy, że zmienna losowa ma rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$ zadany wzorem* $\mathbf{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 1, 2, ..,$ $\lambda > 0$. *Pokaż, że* $\mathbf{E}X = \lambda$, $\mathbf{D}^2X = \lambda$.

Zad 7 *Niech X ma rozkład jednostajny $\mathcal{U}[a, b]$ na przedziale $[a, b]$, o gęstości* $g(x) = \frac{1}{b-a}1_{[a,b]}(x)$. *Pokaż, że* $\mathbf{E}X = \frac{a+b}{2}$, $\mathbf{D}^2X = \frac{(b-a)^2}{2}$.

Zad 8 *Niech zmienna X ma rozkład wykładniczy $\mathcal{E}(\lambda)$ o gęstości* $g(x) = \lambda e^{-\lambda}1_{(0,\infty)}(x)$, $\lambda > 0$. *Pokaż, że* $\mathbf{E}X = 1/\lambda$, $\mathbf{D}^2X = 1/\lambda^2$.

Zad 9 *Niech zmienna X ma rozkład gamma $\gamma_{a,b}$ o gęstości $g(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} 1_{(0,\infty)}(x)$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = a/b$, $\mathbf{D}^2 X = a/b^2$.*

Zad 10 *Niech zmienna X ma rozkład gaussowski $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ o gęstości $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$. Pokaż, że $\mathbf{E}X = m$, $\mathbf{D}^2 X = \sigma^2$.*

Zad 11 *Pokaż, że jeśli zmienna losowa X ma rozkład ciągły o gęstości f wówczas $F'_X(t) = f(t)$.*

Zad 12 *Znajdź dystrybuantę rozkładu geometrycznego $\mathbf{P}(X = k) = pq^{k-1}$, rozkładu jednostajnego $\mathcal{U}[a, b]$ oraz rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(\lambda)$.*

Zad 13 *Pokaż, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$ oraz $Z = aX + bY$, to zachodzi wzór $\mathbf{E}Z = a\mathbf{E}X + b\mathbf{E}Y$. Pokaż, że jeśli X, Y niezależne, to $\mathbf{D}^2 Z = a^2 \mathbf{D}^2 X + b^2 \mathbf{D}^2 Y$.*

Zad 14 *Rzucamy kostką tak długo, aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwaną liczby rzutów.*

Zad 15 *Pokaż, że jeśli X jest zmienną losową o wartościach w $\mathbb{N}$, to $\mathbf{E}X = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X > n)$. Można wykazać, że jeśli $X \geqslant 0$, to $\mathbf{E}X = \int_0^{\infty} \mathbf{P}(X > x) d(x)$.*