Zadania z RP 1. Seria 6. **Zmienne losowe**

Definicja 1 *Niech* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ *będzie przestrzenią probabilistyczną. Odwzorowanie* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *nazywamy zmienną losową o wartościach w* R^n*, jeśli dla każdego* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *zbiór* $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$*.*

Definicja 2 *Rozkładem prawdopodobieństwa na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy dowolną miarę probabilistyczną* μ *(to znaczy* $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$*) na* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$*.*

Definicja 3 *Rozkładem prawdopodobieństwa zmiennej losowej* X *o wartościach w* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy rozkład prawdopodobieństwa* μ_X *określony na* $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$ *zależnością*

$$\mu_X(B) = \mathbf{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(R^n).$$

Istnieją dwa podstawowe rodzaje rozkładów.

Definicja 4 *Rozkład* μ *na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy dyskretnym, jeśli istnieje przeliczalny podzbiór* $S \subset \mathbb{R}^n$ *taki, że* $\mu(S) = 1$*.*

Definicja 5 *Rozkład* μ *na* $\mathbb{R}^n$ *nazywamy ciągłym, jeśli dla pewnej funkcji* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*, całkowalnej mamy*

$$\mu(A) := \int_A f(x)\mu(dx), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Wprowadzamy użyteczne pojęcie dystrybuanty.

Definicja 6 *Dystrybuantą rozkładu* μ *na* $\mathbb{R}$ *nazywamy funkcję* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *zadaną wzorem* $F(t) := \mu((-\infty, t])$*. Jeśli rozkład wyznaczony jest przez zmienną losową* X *dystrybuantę nazywamy* F_X*.*

Zad 1 *Wykazać, że jeśli* X *zmienną losową* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest funkcją mierzalną względem* σ*-ciała zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a, to* $\varphi(X)$ *nie musi być zmienną losową. Pokaż, że jeśli* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *jest mierzalna względem* σ*-ciała zbiorów borelowskich, to* $\varphi(X)$ *jest zmienną losową.*

Zad 2 *Znaleźć* σ*-ciało generowane przez zmienną losową* X*, jeśli:*

- *Rzucamy symetryczną kostką,* X *przyjmuje wartość* 1*, gdy wypadła parzysta liczba oczek,* 2*- jeśli nieparzysta.*
- *Losujemy punkt z koła* $K(a, 1)$*,* $X(\omega) = |\omega - a|$*.*

Jaki jest rozkład, dystrybuanta tej zmiennej.

Zad 3 *Wykonujemy doświadczenia Bernouliego, aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech* X *oznacza liczbę wykonanych doświadczeń. Wyznacz rozkład* X*, wyznacz dystrybuantę* F_X*.*

Zad 4 *Przypuśćmy, że doświadczenie Bernouliego* $\mathcal{B}(n, \lambda/n)$ *wykonujemy* n*-razy na sekundę, a czas oczekiwania na pierwszy sukces* X_n *mierzymy w sekundach. Znajdź dystrybuantę* F_{X_n} *i oblicz granicę* $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(t)$*,* $t \in \mathbb{R}$*.*

Zad 5 *Dystrybuanta rozkładu μ dana jest wzorem*

$$F_\mu = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x < 0, \\ 0.1 + x & \text{dla} \quad 0 \leqslant x < 0.5, \\ 0.4 + x & \text{dla} \quad 0.5 \leqslant x < 0.55, \\ 1 & \text{dla} \quad x \geqslant 0.55. \end{cases}$$

Wyznaczyć $\mu(\frac{1}{2})$, $\mu([0, \frac{1}{2}])$, $\mu((0, 0.55))$.

Zad 6 *W Szuflandii najniższa płaca wynosi* 10, *a maksymalna* 100. *Szansa, że dostaniemy więcej niż* x, $x \in (10, 100)$ *wynosi* $\frac{(x-100)(x-110)}{9000}$. *Znajdź gęstość tego rozkładu.*

Zad 7 *Przypuśćmy, że* $F(t) = 0$ *dla* $t \leqslant 0$ *i* $F(t) = 1$ *dla* $t \geqslant 1$. *Na przedziale* $[0, 1]$ $F(t) = at^2 + bt + c$. *Pokaż, że* F *może być dystrybuantą rozkładu tylko wtedy gdy* $c = 0$, $a + b = 1$, $a \geqslant -1$ *i* $b \geqslant 0$.

Zad 8 *Pokaż, że* $\mu_X(-\infty, t) = F_X(t-)$ *oraz* $\mu(\{x\}) = F_X(t) - F_X(t-)$.

Zad 9 *Udowodnij, że* F_X *ma własności*

- F_X *jest niemalejące, to znaczy jeśli* $s \leqslant t$, *to* $F_X(s) \leqslant F_X(t)$;
- $\lim_{t\to\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$;
- *Pokaż, że* F_X *jest prawostronnie ciągła. To znaczy* $\lim_{s\to t_+} F_X(s) = F(t)$.

Zad 10 *Niech* $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ *będzie kwadratem z miarą jednostajnie rozłożoną. Niech* $X(\omega)$ *będzie odległością* $\omega \in \Omega$ *od najbliższej krawędzi w kwadracie. Policz* F_X.

Zad 11 *Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej* $Y = 3X - 5$, *jeżeli* X *ma rozkład wykładniczy z parametrem* α.

Zad 12 *Pokaż, że istnieją dwie różne zmienne losowe* X, X', *(zbudowane na tej samej przestrzeni probabilistycznej) które mają ten sam rozkład. To znaczy* $\mu_X = \mu_{X'}$.

Zad 13 *Pokaż, że dystrybuanta* F_X *jest ciągła w punkcie* t *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\mathbf{P}_X(\{t\}) = 0$.

Zad 14 *Podaj przykład dystrybuanty, której zbiór punktów nieciągłości jest gęsty.*

Zad 15 *Wykaż, że rozkłady geometryczny i wykładniczy mają własność braku pamięci to znaczy*

$$\mathbf{P}(X > t + s | X > t) = \mathbf{P}(X > s),$$

gdzie w przypadku rozkładu geometrycznego $s, t \in \mathbb{N}$, *w przypadku wykładniczego* $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Zad 16 *Ciągła dystrybuanta* F *ma pochodną* g *(w każdym punkcie). Pokaż, że* g *jest gętością dla dystrybuanty* F.

Zad 17 *Niech* X *ma rozkład* $\mathcal{N}(0, 1)$. *Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (jeśli istnieją) dla (a)* $Y = e^X$, *(b)* $Y = X^2$.