Zadania z RP 1. Seria 5. **Niezależność zdarzeń**

1. Niezależność zdarzeń

Definicja 1 *Zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, gdy* $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.

Zad 1 *Niech Ω będzie zbiorem n elementowym, $A, B \subset \Omega$ niezależne. Pokaż, że jeśli A ma i elementów wówczas B musi mieć $j = kn(NWD(i,n))^{-1}$ elementów, gdzie $k \in \{0, 1, ..., NWD(i,n)\}$.*

Zad 2 *Niech A, B, C będą niezależne. Pokaż, że (a) $A, B \cap C$ są niezależne; (b) $A, B \cup C$ są niezależne; (c) $A, B \backslash C$ są niezależne.*

Zad 3 *Kierowcy dzielą się na ostrożnych (jest ich 95% i taki kierowca powoduje wypadek w ciągu roku z prawdopodobieństwem 0,01) i piratów (jest ich 5%, szansa na wypadek w ciągu roku 0,5). Wybrany losowo kierowca nie spowodował wypadku w roku 1998 ani 1999. Jaka jest szansa, że spowoduje wypadek w roku 2000?*

Zad 4 *Adam, Barnaba i Czesław strzelają do tarczy; szansa trafienia wynosi p. Wiadomo, że dwóch trafiło Wybierz właściwą odpowiedź: (a) jest większa szansa, że Czesław trafił; (b) jest większa szansa, że Czesław nie trafił; (c) szanse są równe.*

Zad 5 *Król Artur urządza turniej rycerski, w którym rycerze spotykają się systemem turniejowym. Obaj uczestnicy każdego pojedynku mają równe szanse na zwycięstwo. Wśród 2^n uczestników jest dwóch braci. Jakie jest prawdopodobieństwo, że się spotkają w pojedynku?*

Zad 6 *W meczu piłki nożnej z prawdopodobieństwem $\frac{1}{6}$ wygrają goście, $\frac{1}{2}$ gospodarze, a z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$ będzie remis. Obliczyć prawdopodobieństwo, że w 14 meczach będzie 7 zwycięstw gospodarzy i 3 remisy.*

2. Lemat o π i λ układach

Definiujemy

1. π układ Π: jeśli $A, B \in \Pi$, to $A \cap B \in \Pi$.
2. λ układ Λ: $\emptyset, \Omega \in \mathcal{A}$; jeśli $A \in \Lambda$, to $A' \in \Lambda$; jeśli $A_i \in \Lambda$ oraz $A_1 \subset A_2 \subset ...$, to $\bigcup A_i \in \Lambda$

Lemat 1 *Jeśli λ układ Λ zawiera π układ Π, to zawiera również $\sigma(\Pi)$.*

Zad 7 *Pokaż, że dwie miary probabilistyczne μ, ν na prostej $\mathbb{R}$ z σ-ciałem Borelowskim są równe jeśli $\mu(-\infty, t] = \nu(-\infty, t]$ dla każdej liczby $t \in \mathbb{R}$.*

Zad 8 *Funkcję $X : \Omega \in \mathbb{R}$ nazywamy Borelowską jeśli $X^{-1}(A) \in \mathcal{F}$, dla każdego $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, gdzie $\mathcal{F}$ jest pewnym σ-ciałem na Ω. Pokaż, że wystarczy sprawdzić warunek dla każdego $A = (-\infty, t]$, $t \in \mathbb{R}$.*

3. Schemat Bernouliego

Schematem Bernouliego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń tego samego doświadczenia o dwóch możliwych wynikach, nazywanych umownie sukcesem i porażką. Poszczególne doświadczenia będziemy nazywać próbami Bernouliego.

Twierdzenie 1 *Prawdopodobieństwo zajścia dokładnie k sukcesów w schemacie Bernoulliego n prób z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym p wynosi $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.*

Zad 9 *Rzucono* 10 *razy kostką. Jaka jest szansa otrzymania*

- 6 *oczek co najmniej raz?*
- 5 *oczek co najmniej raz?*

Zad 10 *Dwie osoby rzucają* n *razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda z nich otrzyma tę samą liczbę orłów?*

Zad 11 *Obliczyć prawdopodobieństwo otrzymania parzystej liczby sukcesów w ciągu* n *prób Bernouliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym* p.

Zad 12 *Jakie jest prawdopodobieństwo, że przy wielokrotnym rzucaniu parą kostek sześciennych suma oczek* 8 *wypadnie przed sumą oczek* 7.

Zad 13 *Rzucamy monetą tak długo, aż wypadnie orzeł. Jaka jest szansa, że gra się zakończy po parzystej liczbie rzutów?*

4. Lemat Borela-Canteli

Definiujemy zdarzenia

$$\limsup A_n := \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n, \quad \liminf A_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} A_n$$

Lemat 2

1. *Jeśli* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) < \infty$, *to* $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 0$.
2. *Jeśli zdarzenia* $A_1, A_2, ...$ *są niezależne i* $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_n) = \infty$, *to* $\mathbf{P}(\limsup A_n) = 1$

Zad 14 *Pokaż, że w nieskończonym ciągu prób Bernouliego ciąg ROOOR powtórzy się nieskończoną liczbę razy.*

Zad 15 *Zdarzenia* A_i *są niezależne i mają różne p-stwa. Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele spośród nich?*

Zad 16 *Rzucamy monetą nieskończenie wiele razy. Niech* A_n *oznacza, że w pierwszych* n *rzutach było tyle samo orłów co reszek. Wykazać, że z p-stwem* 1 *zachodzi nieskończenie wiele zdarzeń* A_n.