Zadania z RP 1. Seria 4. **P-swto całkowite i Wzór Byesa**

1. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie 1 *Jeśli $\{B_1 ..., B_n\}$ jest podziałem zbioru Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dal każdego zdarzenia A mamy*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i).$$

1. Wzór Bayesa

Twierdzenie 2 *Jeśli $\{H_i\}_{i \in I}$ jest przeliczalnym rozbiciem Ω na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie i $\mathbf{P}(A) > 0$, to dla dowolnego $j \in I$ mamy*

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_j)\mathbf{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}.$$

Zad 1 *Znaleźć prawdopodobieństwo wybrania przedmiotu gatunku I, jeśli jest $5/100$ braków, a $80/100$ przedmiotów dobrych jest I gatunku?*

Zad 2 *W pierwszej urnie są 3 kule białe i 2 czarne, a w drugiej są 4 czarne i 1 biała. Rzucamy kostką. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż 5 oczek to losujemy kulę z pierwszej urny, jeżeli wypadnie 5 lub 6 oczek, to losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?*

Zad 3 *W urnie są trzy kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i wyrzucono bez oglądania, a potem wyciągnięto następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?*

Zad 4 *Jest n monet, ale k z nich jest niesymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopodobieństwem $1/3$. Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest niesymetryczna?*

Zad 5 *Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie orzeł wypadł 6 razy z rzędu. Jaka jest szansa, że była to moneta z dwoma orłami?*

Zad 6 *Przypuśćmy, że 5 mężczyzna na 100 i 25 kobiet na 10000 nie rozróżnia kolorów. Wybrano losową osobę nie rozróżniającą kolorów. Jakie jest p-stwo, że jest ona mężczyzną?*

Zad 7 *W mieście działają taksówki: Zielone Taxi (85% samochodów) i Niebieskie Taxi (15% samochodów). wiadek nocnego wypdaku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty pokazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawanie w 80% przypadków, a myli się w 20% przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?*

Zad 8 *Znaleźć prawdopodobieństwo q_a ruiny gracza, który zaczyna grę z kapitałem a zł, a kończy gdy będzie miał c zł lub gdy się zrujnuje.*

Zad 9 *Udowodnić, że zdarzenia A_i rozłączne są niezależne wtedy i tylko wtedy tylko wtedy gdy dla prawie wszystkich zbiorów $P(A_i) = 0$. (Poza być może jednym).*

Zad 10 *Pokazać, że wylosowanie z talii kart asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami niezależnymi.*

Zad 11 *Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolei monetą. Wygra ten który pierwszy wyrzuci orła. Znaleźć szanse wygranej dla każdego z graczy.*

Zad 12 *Owad składa* k *jajeczek z prawdopodobieństwem* $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. *Potomek wylęga się z jaja z prawdopodobieństwem* p *niezależnie od pozostałych. Znaleźć szansę, że liczba potomków będzie równa* l.

Zad 13 *Zdarzenia* $A_1, ..., A_n$ *są niezależne i* $\mathbf{P}(A_k) = p_k$. *Znaleźć p-swto* p, *że żadne ze zdarzeń* A_k *nie zachodzi. Wykazać, że* $p < \exp(-\sum p_k)$

Zad 14 *Wykaż, że p-swto, że zajdzie jednocześnie* k *lub więcej zdarzeń z* $A_1, ..., A_n$ *jest mniejsze od* $(p_1 + ... + p_k)^k/k!$

Zad 15 *Gracz ma nieskończony kapitał i gra aż do momentu w którym wygra* b *zł. Znaleźć prawdopodobieństwo wygranej gracza* A.

Zad 16 *Dwie osoby rzucają po* n *razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że każda otrzyma tę samą liczbę orłów.*

Zad 17 *W komodach* A, B *i* C *są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie* A *są monety złote w* C *monety srebrne, a w* B *jest jedna srebrna i jedna złota moneta. Wylosowano komodę, następnie szufladę, i znaleziono tam monetę złotą. Jaka jest szansa, że w drugiej szufladzie też jest złota moneta?*