Zadania z RP 1. Seria 3. **Prawdopodobieństwo warunkowe**

Wzór podstawowy

Definicja 1 *Prawdopodobieństwem warunkowym zajścia zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B, gdzie $P(B) > 0$ nazywamy liczbę*

$$\mathbf{P}(A|B) := \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}.$$

Zad 1 *Niech p-stwo p_n, że rodzina ma dokładnie n dzieci, będzie równe αp_n, gdzie $n \geqslant 1$ oraz $p_0 = 1 - \alpha p(1 + p + p^2 + \ldots)$. Przypuśćmy, że wszystkie rozkłady płci n dzieci mają równe p-stwa. Wykazać, że dla $k \geqslant 1$ p-stwo, że rodzina ma dokładnie k chłopców jest $2\alpha p^k/(2-p)^{\varepsilon+1}$.*

Zad 2 *Wiadomo, że rodzina ma co najmniej chłopca. Jakie jest p-stwo, że ma ich dwóch lub więcej?*

Zad 3 *Padać przykład zdarzeń A, B i C, dla których: $\mathbf{P}(A|B) < \mathbf{P}(A|B')$ i jednocześnie $\mathbf{P}(A|B \cap C) \geqslant \mathbf{P}(A|B' \cap C)$ $\mathbf{P}(A|B \cap C') \geqslant \mathbf{P}(A|B' \cap C')$.*

Zad 4 *Mamy w urnie b kul białych i c czarnych. Po wyciągnięciu kuli z urny wyrzucamy ją z powrotem i dokładamy jeszcze d kul tego samego koloru. Jakie jest p-stwo $p_{k,n}$ wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach.*

Twierdzenie 1 *Jeśli zdarzenia $A_1, \ldots, A_n$ spełniają warunek*

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0,$$

to

$$\mathbf{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(A_2|A_1) \cdot \ldots \cdot \mathbf{P}(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Zad 5 *Student otrzymuje losowo na egzaminie 3 pytania ze 100. Aby zdać musi odpowiedzieć na wszystkie 3 pytania. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zda jeśli zna odpowiedzi na 90 pytań.*

Zad 6 *Rzucamy trzema kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo, że na żadnej kostce nie wypadła szóstka, jeśli na każdej kostce wypadła inna liczba oczek?*

Zad 7 *Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 i stwierdził, że nie ma asa. Jaka jest szansa, że w ogóle nie ma asa?*

Zad 8 *Jaka jest szansa, że każdy z graczy S,E,W ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że N nie ma żadnego?*

Zad 9 *Z talii 8 kart (4 króle i 4 asy) wybieramy losowo dwie karty. Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia, że wybrano 2 króle jeśli wiadomo, że*

- *wybrano co najmniej jednego króla,*
- *wśród wybranych jest czarny król,*
- *wśród wybranych kart jest król pik.*

Zad 10 *Z talii 32 kart wyciągamy 5. Niech*

- *A zdarzenie polegające na wyciągnięciu dokładnie 3 króli,*
- *B zdarzenie polegające na wyciągnięciu co najmniej 1 króla,*
- *C zdarzenie polegające na wyciągnięciu czarnego króla,*
- *D zdarzenie polegające na wyciągnięciu króla pik.*

Znaleźć prawdopodobieństwa $\mathbf{P}(A|B)$, $\mathbf{P}(A|C)$, $\mathbf{P}(A|D)$.

Zad 11 *Czterej gracze dostali po 13 kart z 52. Jeden z nich zobaczył, że sąsiad posiada*

- *asa pik;*
- *jakiegoś asa czarnego koloru;*
- *jakiegoś asa.*

Jaka jest szansa, że ten gracz nie ma asa?

Zad 12 *W loterii fantowej zorganizowanej na balu szansa wygranej jest równa p, przegranej q, a z prawdopodobieństwem równym r wciągamy los 'graj dalej'. Los 'graj dalej' wrzucamy z powrotem do urny i dokonujemy ponownego losowania. jakie jest prawdopodobieństwo wygranej?*