Zadania z RP 1. Seria 11. **Mocne prawo wielkich liczb**

Rodzaje zbieżności zmiennych losowych

Niech X_n będzie ciągiem zmiennych losowych, zbudowanych na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Możemy wyróżnić trzy rodzaje zbieżności zmiennych losowych:

- Zbieżność prawie na pewno: $X_n \stackrel{\text{p.n.}}{\to} X \iff \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega: \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1.$
- Zbieżność według prawdopodobieństwa: $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X \iff \forall\, \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(|X_n - X| > \epsilon) = 0.$
- Zbieżność według p-tego momentu ($p > 0$): $X_n \stackrel{\mathrm{L}_p}{\to} X \iff \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}|X_n - X|^p = 0.$

Twierdzenie 1 *Zachodzą następujące relacje pomiędzy zmiennymi rodzajami zbieżności:*

- *Zbieżność* p.n. *implikuje zbieżność według* $\mathbf{P}$*:* $X_n \stackrel{\text{p.n.}}{\to} X \Rightarrow X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$.
- *Zbieżność według* P*, implikuje istnienie podciągu zbieżnego* p.n.*:* $X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X \Rightarrow \exists\, (n_k)\ X_{n_k} \stackrel{\text{p.n.}}{\to} X$.
- *Zbieżność* L_p *implikuje zbieżność według* P*:* $X_n \stackrel{\mathrm{L}_p}{\to} X \Rightarrow X_n \stackrel{\mathbf{P}}{\to} X$.
- *Zbieżność według* $\mathbf{P}$ *ani zbieżność* L_p *nie implikują zbieżności* p.n..
- *Bez dodatkowych założeń zbieżność* p.n. *ani zbieżność* $\mathbf{P}$ *nie implikują zbieżności* L_p

Twierdzenie 2 *Prawo* $0-1$ *Kołmogorowa. Jeśli zmienne losowe* X_n *są niezależne, a zdarzenie* A *jest mierzalne względem każdego* σ*-ciała ogonowego (tj.* $\sigma(\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, ...)$*, gdzie* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_n)$*), to* $\mathbf{P}(A) = 0$ *lub* $\mathbf{P}(A) = 1$*. W ludzkim języku oznacza to, że zdarzenie* A *zależące jedynie od dowolnie dalekich zmiennych* X_n *jest albo pewne albo niemożliwe.*

Zad 1 *Udowodnij prawo* $0-1$ *Kołmogorowa.*

Niech $S_n := X_1 + ... + X_n$.

Zad 2 *Pokaż, że dla ciągu zmiennych niezależnych* X_n *z p-stwem* 1 *albo z p-stwem równym* 0*:*

- $\limsup \frac{S_n}{n} \leqslant a,\ a \in \mathbb{R}$*;* $\liminf \frac{S_n}{n} \geqslant a,\ a \in \mathbb{R}$*;*
- *istnieje skończona granica* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$*; istnieje skończona suma szeregu* $\sum_{n=1}^{\infty}$.

Zad 3 *Udowodnij następująca nierówność Kołmogorowa. Jeśli* $X_1, ..., X_n$ *są niezaleznymi zmiennymi,* $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$*, to dla każdego* $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}(\max_{k\leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}S_n^2}{\varepsilon^2}.$$

Zad 4 *Wywnioskuj z poprzedniego zadania twierdzenie o dwóch szeregach. Jeśli* X_n *niezależne,* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}X_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{D}^2 X_n$ *zbieżne, to szereg* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ *jest zbieżny p.n.*

Zad 5 *Niech* $X^{(c)} = X1_{|X|\leqslant c}$*. Z lematu BC udowodnij twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach. Warunkiem koniczenym zbieżności p.n. szeregu niezależnych zmiennych losowych* $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ *jest zbieżność dla każdego* $c > 0$ *szeregów*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}X_n^{(c)},\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^2 X_n^{(c)},\ \ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(|X_n| > c),$$

a warunkiem dostatecznym jest zbieżność tych szeregów przy pewnym $c > 0$.

Zad 6 *Zbadaj zbieżność szeregu* $\sum X_n$ *niezależnych zmiennych losowych, gdy:*

1. $\mathbf{P}(X_n = 2^{-n}) = \mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{1}{2}$,
2. $\mathbf{P}(X_n = 1) = 1 - \mathbf{P}(X_n = 0) = \frac{1}{n}$.

Zad 7 *Niech* X_n *będą niezależne i mają ten sam rozkład* $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2}$ *(zmienne Rademachera). Udowodnij, że* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n$ *jest zbieżny p.n wtedy i tylko wtedy, gdy* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$*, to.*

Zad 8 *(bardzo trudne) Zdefiniujmy* $Y = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n X_n$*, gdzie* X_n *zmienne Rademachera. Wiemy, że dla* $0 < \lambda < 1$ Y *jest dobrze określone. Udowodnij (korzystając z prawa* $0-1$ *Kołmogorowa), że* Y *ma rozkład albo absolutnie ciągły wg. miary Lebsgue'a (ma gęstość), albo singularny względem miary Lebesgue'a.*

Uwaga 1 *Erdos wykazał, że parametry* λ *dla których* Y *ma rozkład singularny mają miarę Lebesgue'a* 0*. Ich dokładna postać nie jest wszakże znana (znamy liczne przykłady).*

Prawa wielkich liczb

Niech X_n będą zmiennymi losowymi. Oznaczmy $S_n = X_1 + ... + X_n$. Jednym z ważniejszych twierdzeń klasycznego rachunku prawdopodobieństwa jest MPWL:

Twierdzenie 3 *Jeśli* X_n *stanowią ciąg niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie (tj* $\mu_{X_1} = \mu_{X_2} = ...$*) o skończonej wartości oczekiwanej (tj.* $\mathbf{E}X_1 = \mathbf{E}X_2 = ... < \infty$*), to* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}X_1$ *p.n.*

Zad 9 *Znacznie łatwiej udowodnić słabe prawo wielkich liczb SPWL. Niech* X_i *będą niezależne o tym samym rozkładzie. Pokaż, że jeśli istnieje* $\mathbf{E}|X_n|^2$ *wówczas* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \mathbf{E}X_1$ *według* $\mathbf{P}$*. Zauważ, że SPWL zachodzi bez założenia niezależności, przy założeniu, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{D}^2 S_n}{n^2} = 0$.

Zad 10 *Pierwszym krokiem na drodze do wykazania MPWL jest następujące twiedzenie Kołmogorowa. Przypuśćmy, że* X_n *są niezależne i niech* b_n *będzie ciągiem takim, że* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^2 X_n}{b_n^2} < \infty$*. Korzystając z twierdzenia Toeplitza (z Analizy 1) udowodnij, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{b_n} = 0$.

W szczególności jeśli $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^2 X_n}{n^2} < \infty$, to X_n spełnia MPWL.

Zad 11 *Niech* X_n *będą niezależne o tym samym rozkładzie. Pokaż, że definując* $Y_n = X_n 1_{|X_n| \leqslant n}$ *dostajemy niezależne zmienne takie, że* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^2 Y_n}{n^2} < \infty$.

Zad 12 *Resztę dowodu MPWL stanowi umiejętne zastosowanie lematu Borela-Canteli. Udowodnij, że* $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(X_n \neq Y_n) < \infty$ *i wywnioskuj stąd, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \mathbf{E}X_1$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\lim_{n\to\infty} \frac{Y_1 + ... + Y_n}{n} = \mathbf{E}X_1$*. Następni pokaż, że* $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}Y_i}{n} = \mathbf{E}X_1$*. Zatem na mocy poprzedniego zadania dostajemy MPWL.*

Zad 13 *Niech* X_n *będą niezaleznymi zmiennymi losowymi,* $\mathbf{P}(X_n = 1) = \mathbf{P}(X_n = -1) = p_n$*,* $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - 2p_n$*. Korzystając z lematu BC znajdź warunek konieczny i dostateczny, by ciąg* X_n *spełniał MPWL.*

Zad 14 *Niech* X_n*,* $n = 1, 2, ...$ *będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że*

$$\mathbf{P}(X_n = n+1) = \mathbf{P}(X_n = -(n+1)) = \frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}, \quad \mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n+1)\log(n+1)}.$$

Pokaż, że X_n *spełnia SPWL, a nie spełnia MPWL.*