Zadania z RP 1. Seria 11. **Gęstość warunkowa.**

Niech $(\Omega, \mathcal{M}, \mathbf{P})$ będzie przestrzenią probabilistyczną, X zmienną losową określoną na tej przestrzeni. Przypomnijmy, że jeśli $\mathbf{E}|X| < \infty$, wtedy dla dowolnego $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$ można jednoznacznie zdefiniować warunkową wartość oczekiwaną $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ (zmienną losową) za pomocą warunków

- $\mathbf{E}(X|\mathcal{F})$ jest $\mathcal{F}$ mierzalna;
- dla każdego $A \in \mathcal{F}$, $\mathbf{E}(1_A \mathbf{E}(X|\mathcal{F})) = \mathbf{E}(1_A X)$.

W szczególności, gdy $\mathcal{F} = \sigma(Y)$, wówczas stosujemy zapis $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}(X|\sigma(Y))$. Udowodniliśmy, że $\mathbf{E}(X|Y) = h(Y)$, gdzie h jest funkcją borelowską, zatem możemy pisać $\mathbf{E}(X|Y = y)$ jako wartość $h(y)$.

Definicja 1 *Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia $A \in \mathcal{M}$ pod warunkiem $Y = y$ nazywamy następująca wielkość $\mathbf{E}(1_A|Y = y)$ i oznaczamy $\mathbf{P}(A|Y = y)$.*

Zad 1 *Niech Y będzie zmienną o rozkładzie $\mathcal{U}[0, 1]$ - jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Jeśli $Y = x$, to rzucamy n razy monetą, której szansa wypadnięcia orła wynosi x. Niech S_n oznacza liczbę wyrzuconych orłów. Znajdź prawdopodobieństwo $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 0, 1, 2, ..., n$.*

Zad 2 *Udowodnij, że jeśli wektor (X, Y) ma gęstość f, to*

$$\mathbf{P}(X \in B|Y) = \frac{\int_B f(x, Y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x, Y)dx}, \quad \mathbf{E}(\varphi(X)|Y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x, Y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x, Y)},$$

dla takich funkcji borelowskich, że $\mathbf{E}|\varphi(X)| < \infty$. Gdy dla pewnego zdarzenia ω mamy $\int_{\mathbb{R}} f(x, Y(\omega))dx = 0$, wtedy kładziemy 0 w obu powyższych wzorach.

Definicja 2 *Przy założeniach z powyższego zadania wielkość $\frac{f(x,Y)}{\int_R f(x,Y)dx}$ nazywamy gęstością warunkową $f_{(X|Y)}(x)$.*

Zad 3 *Pokaż, że jeśli (X, Y) jest wektorem normalnym $\mathcal{N}((\mu_1, \mu_2), \mathbf{Cov})$, gdzie (μ_1, μ_2) jest wektorem średnich, $\mathbf{Cov}$ macierzą kowariancji wówczas*

$$\mathbf{E}(X|Y) = \mu_1 + \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\mathbf{D}^2 Y}(Y - \mu_2).$$

Zad 4 *Odcinek $[0, 1]$ łamiemy losowo na dwie części, następnie większą część łamiemy losowo na dwie. Punkty łamania mają rozkład jednostajny. Jaka jest szansa, że ze zbudowanych odcinków można zbudować trójkąt.*

Zad 5 *Niech X, Y, będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach z gęstościami odp. g i h. Znajdź wzór na $f(X|X + Y)$.*

Zad 6 *Znajdź rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$, jeśli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach:*

- $X \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2)$, $Y \sim \mathcal{N}(0, \mu^2)$ *(normalny z parametrami $0, \lambda^2$, $0, \mu^2$)*
- $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{E}(\mu)$ *(wykładniczy z parametrami λ, μ)*
- $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ *(Poissona z parametrami λ, μ)*

Zad 7 *Niech zmienna* (X,Y) *ma rozkład o gęstości* $f(x,y) = 8xy1_{\{x>0,y>0,x^2+y^2<1\}}(x,y)$. *Znajdź* $\mathbf{E}(Y|X=\frac{1}{2})$.

Zad 8 *Niech* X,Y *będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na* $\mathcal{U}[0,1]$. *Niech ponadto* $U=\min(X,Y)$, $V=\max(X,Y)$. *Znaleźć: a)* $\mathbf{E}(U|V)$, *b)* $\mathbf{E}(V|U)$, *c)* $\mathbf{E}(\sin(UV)|U)$.

Zad 9 *Niech* X *będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z parametrem* λ *pod warunkiem* $X=n$ *Parametr* λ *jest zmienną losową o rozkładzie* $\Gamma(a,b)$ *(rozkład gamma). Oblicz* $\mathbf{P}(X=k)$.

Zad 10 *Wyznacz rozkład warunkowy* $\mathbf{P}(\lambda|X=n)$ *oraz* $\mathbf{E}(\lambda|X=n)$.

Zad 11 *Niech* $X_1,...,X_n$ *będą zmiennymi losowymi postaci* $X_i = m+U+V_i$, *gdzie* $\mathbf{E}U = \mathbf{E}V_i = 0$, $\mathbf{D}^2U = u^2$, $\mathbf{D}^2V_i = v^2$ *oraz* $\mathbf{Cov}(U,V_i) = 0$. *Znajdź prostą regresji liniowej dla zmiennych* X_{n+1}, $S_n = X_1+...X_n$, *to znaczy zmienną* aS_n+b, *gdzie* a,b *są minimalizatorami funkcji* $\mathbf{E}(X_{n+1}-aS_n+b)^2$. *Dlaczego w przypadku gdy* U_i,V *mają łączny rozkład gaussowski* $\mathbf{E}(X_{n+1}|S_n) = aS_n+b$ *tzn. naszej prostej regresji liniowej?*

Zad 12 *Niech* $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ *będą miarami probabilistycznymi na* $(\Omega,\mathcal{M})$, *dla których istnieje gęstość* $d\mathbf{Q}/d\mathbf{P} = Z>0$ $\mathbf{P}$*-p.n. Niech* $\mathcal{F}\subset\mathcal{M}$ *i niech* $\mathbf{E_Q}|X|<\infty$. *Wówczas*

$$\mathbf{E_Q}(X|\mathcal{F}) = \frac{\mathbf{E_P}(XZ|\mathcal{F})}{\mathbf{E}_p(Z|\mathcal{F})}.$$