Zadania z RP1. Seria 1. **Definicja Prawdopodobieństwa**

Paradoksy Kawalera de Mere jako przykład, że trzeba podać Ścisłą definicję prawdopdobieństwa i umieć wybrać dobry opis zjawiska.

Zad 1 *Przy rzucie trzema kostakami sumę* 11 *i* 12 *oczek można otrzymać na tyle samo sposobów. Dlaczego częściej wypada suma* 11*?*

Zad 2 *Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie co najmniniej jednej jedynki przy rzucie* 4 *kostakami, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy* 24 *rzutach dwiema kostkami?*

Do zdefiniowania prawdopodobieństwa potrzeba trójki: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Aksjomaty dla $\mathcal{F}$: $\mathcal{F} \neq \emptyset$

1. Jeśli $A \in \mathcal{F}$, to $A' \in \mathcal{F}$;
2. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, ...$, to $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Zad 3 *Niech A, B, C będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach następujące zdarzenia:*

1. *zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C;*
2. *zachodzą dokładnie dwa spośród zdarzeń A, B, C;*
3. *zachodzą co najmniej dwa spośród zdarzeń A, B, C.*

Zad 4 *Pokazać, że* $A \cup B \cup C = (A' \cap B' \cap C')'$, $A \cap B \cap C = (A' \cup B' \cup C')'$.

Zad 5 *Które z poniższych równości są spełnone dla dowolnych A, B, C:*

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$;
2. $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$.

Zad 6 *Ile jest wszystkich możliwych σ-ciał, jeśli Ω ma n elementów?*

Aksjomaty dla $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}_+$

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;
2. Jeśli $A_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, 2, ...$, oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)$.

Zad 7 *Udowodnić, że*

1. $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$;
2. *Jesli $A_1, A_2, ..., A_n$ są parami rozłączne, to $\mathbf{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A_i)$ (skończona addytywność);*
3. $\mathbf{P}(A') = 1 - \mathbf{P}(A)$;
4. *Jeśli $A \subset B$, to $\mathbf{P}(B \backslash A) = \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A)$ oraz $\mathbf{P}(A) \leqslant \mathbf{P}(B)$;*
5. $\mathbf{P}(A) \leqslant 1$;
6. $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Zad 8 *Udowodnij wzór włączeń i wyłączeń w wersji dla trzech zbiorów: A, B, C*

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(B \cap C) - \mathbf{P}(C \cap A) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).$$

Zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 *Wzór włączeń i wyłączeń*

$$\mathbf{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \mathbf{P}(A_i) - \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + ... + (-1)^{n+1}\mathbf{P}(A_1 \cap ... \cap A_n).$$

Zadania dotyczące własności funkcji prawdopodobieństwa.

Zad 9 *Udowodnić, że* $\mathbf{P}(A_1 \cup ... \cup A_n) \leqslant \mathbf{P}(A_1) + ... + \mathbf{P}(A_n)$.

Zad 10 *Udowodnić, że* $\max\{\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B)\} \geqslant \mathbf{P}(A \cup B) \geqslant \mathbf{P}(A) + P(B) - 1$.

Zad 11 *Dane są* $P(A^{'}) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ *i* $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. *Obliczyć* $\mathbf{P}(B^{'})$, $\mathbf{P}(A \cap B^{'})$.

Zad 12 *Mamy zdarzenia* A_i $1 \leqslant i \leqslant n$. *Wiemy, że jedno z nich zachodzi i nie zachodzą jednocześnie więcej niż dwa zdarzenia. Ponadto* $\mathbf{P}(A_i) = p$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = q$ $i \neq j$. *Pokaż, że* $p \geqslant 1/n$, $q \leqslant 2/n$.

Zad 13 *Niech* A_k *będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez* k. *Wykazać, że* $\mathbb{N}$ *nie istnieje takie p-stwo* $\mathbf{P}$, *że* $\mathbf{P}(A_k) = 1/k$ *dla* $k \geqslant 1$.

2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli Ω jest zbiorem skończonym i składa się z równoprawdopodobnych zdarzeń, to $\mathbf{P}(A) = |A|/|\Omega|$.

Zad 14 *Jaka jest szansa otrzymania pięciu pików w grze w brydża? Wyrzucenia trzech orłów w siedmiu rzutach monetą.*

Zad 15 *Rzucono trzema rozróżnialnymi kostkami. Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia trzech oczek na co najmniej jednej z nich, jeśli suma wyrzuconych oczek wynosi* 10*?*

Zad 16 *Rzucamy dwiema kostkami. Obliczyć prawdopobieństwo, że iloczyn liczb uzyskanych na kostkach jest liczbą parzystą.*

Zad 17 *Z urny zawierającej* n *białych i* n *czarnych kul pobieramy losowo parzystą liczbę kul (próbki są jednakowo prawdopodobne). Znaleźć prawdopodobieństwo, że wśród wyjętych kul będzie równa liczba kul czarnych i białych.*

Zad 18 *Ustawiamy* 10 *dziewczyn i* 3 *chłopców w okręgu. Jakie jest p-stwo, że chłopcy nie siedzą obok siebie?*

Zad 19 *Mamy* 5 *różnych kart. Losujemy ze zwracaniem* 6. *Jakie jest prawdopdobieństwo, że wylosujemy* 3 *różne karty.*

Zadania ciekawsze jako przykład zastosowań prawdopodobieństwa

Zad 20 *Losujemy dwa punkty z odcinka. Jakie jest p-stwo, że z usykanych odcinków można zbudować trójkąt.*

Zad 21 *Z jeziora wyłowiono* 200 *ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono* 100 *ryb, a wśród nich było* 8 *oznakowanych. Za rozsądną ocenę liczby ryb w jeziorze mozna uznać liczbę ryb, dla której zrealizowalo się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jaka to liczba?*

Zad 22 *Na zajęcia przychodzi* n *osób. Jaka jest szansa, że w tej grupie dwie osoby urodziły się tego samego dnia? Ile musi być w grupie osób, żeby to prawdopodobieństwo przekroczyło* $\frac{1}{2}$.