Zadania z PS2. Seria 2. **Całka stochastyczna Ito.**

Definicja 1 *Klasę procesów X prognozowalnych i takich, że $\mathbf{E}\int_0^T X_s^2 ds < \infty$ oznaczamy przez $\mathcal{L}_T^2$. Dla takich procesów dobrze określona jest całka stochastyczna $\int XdW$.*

Zad. 1 Niech $X \in \mathcal{L}_T^2$, $t_1 < t_2 \leqslant T$. Niech ξ będzie zmienną losową ograniczoną $\mathcal{F}_{t_1}$ mierzalną. Pokaż, że $\xi X 1_{(t_1,t_2]} \in \mathcal{L}_T^2$.

Zad. 2 Uogólnienie procesów elementarnych. Niech $0 \leqslant t_0 < t_1 ... < t_m$, ξ_k - $\mathcal{F}_{t_k}$ mierzalne $\xi_k \in L^2(\Omega)$. Definujemy

$$X_t = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k 1_{(t_k,t_{k+1}]}(t)$$

Dla procesów $X \in \mathcal{L}_T^2$ zachodzi równość

$$\int_0^t XdW = \sum_{k=0}^{m-1} \xi_k (W_{t_{k+1}\wedge t} - W_{t_k \wedge t}).$$

Zad. 3 Jeśli X jest prognozowalny i ciągły w L^2 (tzn. $[0,T] \ni t \to X_t \in L^2(\Omega)$ jest ciągła), to $X \in \mathcal{L}_T^2$ i dla każdego ciągu $(t_{k,n})_{n=1}^\infty$ podziałów normalnych

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} X_{t_k,n}(W_{t_{k+1,n}\wedge t} - W_{t_{k,n}\wedge t}) \xrightarrow{L^2} \int_0^t XdW.$$

Czyli całka stochastyczna Ito jest uogólnieniem całki Wienera.

Zad. 4 Obliczyć

1. Obliczyć $\int_0^t W_s dW_s$ dla $t \in [0,T]$.
2. Niech $(t_{k,n})_{n=1}^\infty$ będzie ciągiem podziałów normalnych odcinka $[0,1]$. Obliczyć granicę w $L^2(\Omega)$

$$\sum_{k=0}^{m_n-1} W_{t_k,n}(W_{t_{k+1,n}} - W_{t_{k,n}}).$$

Zad. 5 Niech $h \in L^2[0,T]$. Definiujemy $M_t = \int_0^t hdW$. Pokaż, że M_t jest procesem gaussowskim i policz funkcję kowaraincji.

Zad. 6 (Most Browna). Pokaż, że proces zadany na odcinku $[0,1]$ za pomocą całki stochastycznej

$$Y_t := \begin{cases} (1-t)\int_0^t \frac{1}{1-s} dW_s & 0 \leqslant t < 1 \\ 0 & t = 1 \end{cases}$$

ma takie same rozkłady skończenie wymiarowe jak $Z_t = W_t - tW_1$