Seria 4. Prawdopodobieństwo całkowite

1. Wzór na prawdopodobieństwo całkowite

Twierdzenie 1 *Jeśli* $\{B_1 ..., B_n\}$ *jest podziałem zbioru* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie, to dal każdego zdarzenia* A *mamy*

$$\mathbf{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(A|B_i)\mathbf{P}(B_i).$$

2. Wzór Bayesa

Twierdzenie 2 *Jeśli* $\{H_i\}_{i \in I}$ *jest przeliczalnym rozbiciem* Ω *na zdarzenia o dodatnim prawdopodobieństwie i* $\mathbf{P}(A) > 0$, *to dla dowolnego* $j \in I$ *mamy*

$$\mathbf{P}(H_j|A) = \frac{\mathbf{P}(A|H_j)\mathbf{P}(H_j)}{\sum_{i \in I} \mathbf{P}(A|H_i)\mathbf{P}(H_i)}.$$

Zad 1 *Znaleźć prawdopodobieństwo wybrania przedmiotu gatunku I, jeśli jest* $5/100$ *braków, a* $80/100$ *przedmiotów dobrych jest I gatunku?*

Zad 2 *W pierwszej urnie są* 3 *kule białe i* 2 *czarne, a w drugiej są* 4 *czarne i* 1 *biała. Rzucamy kostką. Jeżeli na kostce wypadnie mniej niż* 5 *oczek to losujemy kulę z pierwszej urny, jeżeli wypadnie* 5 *lub* 6 *oczek, to losujemy kulę z drugiej urny. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania kuli białej?*

Zad 3 *W urnie są trzy kule białe i dwie czarne. Wyciągnięto jedną kulę z urny i wyrzucono bez oglądania, a potem wyciągnięto następną. Jaka jest szansa, że za drugim razem wyciągnięto kulę białą?*

Zad 4 *Jest* n *monet, ale* k *z nich jest niesymetrycznych i orzeł wypada na nich z prawdopdobieństwen* $1/3$. *Wybrano losowo monetę i w wyniku rzutu wypadł orzeł. Jaka jest szansa, że moneta jest niesymetryczna?*

Zad 5 *Wsród* 65 *monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie orzeł wypadł* 6 *razy z rzędu. Jaka jest szanasa, że była to moneta z dwoma orłami?*

Zad 6 *W mieście działają taksówki: Zielone Taxi (*$85/100$ *samochodów) i Niebieskie Taxi (*$15/100$ *samochodów). wiadek nocnego wypdaku zakończonego ucieczką kierowcy twierdzi, że samochód był niebieski. Eksperymenty pokazały, że świadek rozpoznaje kolor poprawanie w* $80/100$ *przypadków, a myli się w* $20/100$ *przypadków. Jaka jest szansa, że w wypadku uczestniczyła niebieska taksówka?*

Zad 7 *Znaleźć prawdopdobieństwo* q_a *ruiny gracza, który zaczyna grę z kapitałem* a *zł, a kończy gdy będzie miał* c *zł lub gdy się zrujnuje.*

Zad 8 *Udowodnić, że zdarzenia* A_i *rozłączne są niezależne wtedy i tylko wtedy tylko wtedy gdy dla prawie wszystkich zbiorów* $P(A_i) = 0$. *(Poza być może jednym).*

Zad 9 *Pokazać, że wylosowanie z talii kart asa i wylosowanie karty czerwonej są zdarzeniami nieależnymi.*

Zad 10 *Adam, Bolek i Czesio rzucają po kolei monetą. Wygra ten który pierwszy wyrzuci orła. Zneleźć szanse wygranej dla każdego z graczy.*

Zad 11 *Owad składa* k *jajeczek z prawdopodobieństwem* $\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. *Potomek wylęga się z jaja z prawdodpodobieństwem* p *niezależnie od pozostałych. Zneleźć szansę, że liczba potomków będzie równa* l.

Zad 12 *Zdarzenia* $A_1, ..., A_n$ *są niezleżne i mają jednakowe prawdopdobieństwo* p. *Jaka jest szansa, że zajdzie dokładnie jedno ?*

Zad 13 *Gracz ma nieskończony kapitał i gra aż do momentu w którym wygra b zł. Znaleźć prawdopodobieństwo wygranej gracza A.*

Zad 14 *Dwie ososby rzucają po n razy symetryczną monetą. Jakie jest prawdopdobieństwo, że każda otrzyma tę samą liczbę orłów.*

Zad 15 *W komodach A, B i C są po dwie szuflady. W każdej szufladzie jest jedna moneta, przy czym w komodzie A są monety złote w C monety srebrene, a w B jest jedna srebrna i jedna złota moneta. Wylosowano komodę, następnie szufladę, i znaleziono tam monetę złotą. Jaka jest sznasa, że w drugiej szufladzie też jest złota moneta?*