Seria 11. Rozkłady warunkowe

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja 1 *Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia $A \in \mathcal{F}$ pod warunkiem $Y = y$, które oznaczymy przez $\mathbf{P}(A|Y = y)$, będziemy nazywać wielkość $\mathbf{E}(1_A|Y = y)$.*

Twierdzenie 1 *W przypadku kiedy Y jest zmienną dyskretną, dowodzi się, że*

$$\mathbf{E}(1_A|Y = y) = \frac{\mathbf{P}(A \cap (Y = y))}{\mathbf{P}(Y = y)}.$$

Twierdzenie 2 *W przypadku kiedy (X, Y) ma rozkład ciągły o gęstości $g(x, y)$, dowodzi się, że*

$$\mathbf{E}(1_A|Y = y) = \frac{\int_A g(x, y)dx}{\int_R g(x, y)dx}.$$

Wrażenie $g(x|y) = \frac{g(x,y)}{\int_R g(x,y)dx}$ nazywa się gęstością warunkową.

W podanych przypadkach możemy zdefiniować warunkową wartość oczekiwaną jako

$$\mathbf{E}(\varphi(X)|Y = y) := \int_\Omega \varphi(X)\mathbf{P}(d\omega|Y = y) = \int_R \varphi(x)\mu_y(dx),$$

gdzie $\mu_y(B) = \mathbf{P}(X \in B|Y = y)$.

Zad 1 *Zmienne losowe X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny*

$$\mathbf{P}(X = k) = \mathbf{P}(Y = k) = p(1 - p)^{k-1}, \ \ k = 1, 2, ..., \ 0 < p < 1.$$

Obliczyć $\mathbf{P}(X = 2|X + Y = 4)$, $\mathbf{E}(X|X + Y = 4)$

Zad 2 *Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$ jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie $\mathcal{N}(0, \lambda^2)$*

Zad 3 *Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$ jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie wykładniczym $\mathcal{E}(\lambda)$.*

Zad 4 *Znaleźć rozkład warunkowy X pod warunkiem $X + Y = t$ jeśli X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$.*

Zad 5 *Niech $Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Jeśli $Y = x$, to rzucamy monetą n razy dla której pstwo wypadnięcia orła jest równe x. Niech S_n oznacza liczbę orłów. Znaleźć $\mathbf{P}(S_n = k)$, $k = 0, 1, ..., n$.*

Zad 6 *Niech X, Y będą zmiennymi niezależnymi o gęstościach odpowiednio $f_1(x)$, $f_2(x)$. Niech $Z + X + Y$. Znaleźć gęstość warunkową.*

Własności warunkowej wartości oczekiwanej

Twierdzenie 3 *Dowodzi się, że $\mathbf{E}(X|Y) = h(Y)$, gdzie h jest pewną funkcją mierzalną. Używając zapisu $\mathbf{E}(X|Y = y) = h(y)$. Mamy własności:*

- $\mathbf{E}(X|Y)$ *jest linowe - to znaczy* $\mathbf{E}(aX_1 + bX_2|Y) = a\mathbf{E}(X_1|Y) + b\mathbf{E}(X_2|Y)$;
- $\mathbf{E}(1|Y) = 1$, $\mathbf{E}(X|Y) \geqslant 0$ *jeśli* $X \geqslant 0$;
- *Jeśli X, Y są niezależne, to* $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$;
- *Jeśli $X = h(Y)$, to* $\mathbf{E}(X|Y) = h(Y)$

Zad 7 *Niech* X, Y *zmienne niezależne o rozkładzie jednostajnym* $\mathcal{U}(0,1)$. *Oblicz* $\mathbf{E}(X|Y)$.

Zad 8 *Niech* X, Y *zmienne niezależne o rozkładzie jednostajnym* $\mathcal{U}(0,1)$. *Oblicz* $\mathbf{E}(X-Y|X+Y)$.

Zad 9 *Niech* X, Y *zmienne niezależne o rozkładzie jednostajnym* $\mathcal{U}(0,1)$. *Oblicz* $\mathbf{E}(X^2Y|Y)$.

Zad 10 *Niech* X, Y *zmienne niezależne o rozkładzie jednostajnym* $\mathcal{U}(0,1)$. *Oblicz* $\mathbf{E}(X|X^2+Y^2)$.

Zad 11 *Niech* (X,Y) *ma rozkład o gęstości* $f(x,y) = 8xy1_{\{x>0, y>0, x^2+y^2<1\}}(x,y)$. *Znaleźć* $\mathbf{E}(Y|X = \frac{1}{2})$.

Zad 12 *Niech* X_i *będą zmiennymi niezależnymi o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że*

$$\mathbf{E}(X_1|X_1 + \ldots + X_n) = \frac{1}{n}(X_1 + \ldots + X_n).$$

Zad 13 *Niech* (X,Y) *będzie wektorem gaussowskim takim, że* $\mathbf{E}X = m_X$, $\mathbf{E}y = m_Y$, $\mathrm{D}^2X = \sigma_X^2$, $\mathrm{D}^2Y = \sigma_Y^2$ *oraz znamy współczynnik korelacji*

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

Pokaż, że $\mathbf{E}(X|Y) = m_X + \rho(X,Y)\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(Y - mu_Y)$

Zad 14 *Zagadnienie prognozy. Załóżmy, że zmienne* $X_1, \ldots X_{n+1}$ *są postaci* $X_i = m + U + V_i$ *oraz, że zmienne* U, V_i *są nieskorelowane. Obliczyć* $\mathbf{E}(X_{n+1}|S_n)$, *gdzie* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

Zad 15 *Niech* $X_0, X_1 \ldots$, *będą niezależnymi zmiennymi losowymi, przy czym* $\mathbf{E}X_i = a$. *Niech* τ *będzie zmienną losową nieujemną o wartościach całkowitych, niezależną od zmiennych* X_i, *taka, że* $\mathbf{E}\tau < \infty$. *Udowodnij, że*

$$\mathbf{E}(X_1 + \ldots + X_\tau) = a\mathbf{E}\tau.$$