Seria 1. Proces stochastyczny

Definicja procesu

Definicja 1 *Niech T będzie dowolnym zbiorem, $(E, \mathcal{E})$ dowolną przestrzenią mierzalną. Procesem stochastycznym indeksowanym przez zbiór T, o wartościach w przestrzeni $(E, \mathcal{E})$, nazywamy dowolną rodzinę zmiennych losowych X_t, $t \in T$ określona na przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ o wartościach w $(E, \mathcal{E})$.*

Dla nas najważniejszymi zbiorami będą $T = \mathbb{N}$, $T = \mathbb{R}_+$, $T = \mathbb{R}$, $T = [0, 1]$. Mamy dwa podstawowe przykłady procesów stochastycznych.
Proces Poissona

Definicja 2 *Procesem Poissona z parametrem λ, nazywamy proces stochastyczny N_t określony na $T = \mathbb{R}_+$ o następujących własnościach:*

1. $N_0 = 0$ p.n*;*
2. *dla dowolnego układu $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n$ zmienne losowe $N_{t_1} - N_{t_0}$,..., $N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ są niezależne (przyrosty niezależne);*
3. *dla dowolnych $s, t \in T$, $s \leqslant t$ mamy $N_t - N_s \sim N_{t-s} - N_0$ (przyrosty jednorodne w czasie); ponadto zmienna N_t ma rozkład $\mathcal{P}(\lambda)$ (rozkład Poissona z parametrem λ)*
$$\mathbf{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \ \ \forall\ k \geqslant 0;$$
4. *proces N_t jest prawie na pewno prawostronnie ciągły.*

Zad 1 *Udowodnij, że z prawdopodobieństwem 1 trajektorie procesu Poissona są niemalejące, przyjmują wartości z Z_+, mają wszystkie skoki równe 1 oraz dążą do nieskończoności.*

Zad 2 *Wykaż, ze moment pierwszego skoku w procesie Poissona*
$$S_1 := \inf\{t :\ N_t > 0\}$$
jest zmienną wykładniczą z parametrem λ.

Zad 3 *Niech S_k będzie momentem k-tego skoku w procesie Poissona. Wykaz, że odstępy miedzy skokami*
$$T_1 = S_1, T_2 = S_2 - S_1, T_3 = S_3 - S_2, ...$$
są zmiennymi niezależnymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym.

Zad 4 *Udowodnij, że* $\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda$ p.n.

Zad 5 *Niech N_t^1, N_t^2 będą niezależnymi procesami Poissona. Wykaz, że $N_t^1 + N_t^2$ jest procesem Poissona.*

Zad 6 *Niech N_t^1, N_t^2 będą procesami Poissona. Definiujemy zmienne losowe $\triangle N_t^i = \lim_{s\to t_-} N_t^i - N_s^i$, gdzie $i \in \{1, 2\}$. Pokaz, że procesy są niezależne jeśli $\sum_{t\in\mathbb{R}_+} \triangle N_t^1 \triangle N_t^1 = 0$* p.n.

Proces Wienera

Definicja 3 *Procesem Wienera, nazywamy proces stochastyczny W_t określony na $T = \mathbb{R}_+$ o następujących własnościach:*

1. $W_0 = 0$*;*

2. *dla dowolnego układu* $0 \leqslant t_0 < t_1 < ... < t_n$ *zmienne losowe* $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ *są niezależne (przyrosty niezależne);*

3. *dla dowolnych* $s, t \in T$, $s \leqslant t$ *mamy* $W_t - W_s \sim W_{t-s} - W_0$ *(przyrosty jednorodne w czasie); ponadto zmienna* W_t *ma rozkład* $\mathcal{N}(0, t)$ *(rozkład normalny z parametrami* 0, T*)*

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}};$$

4. *proces* W_t *jest prawie na pewno ciągły.*

Zad 7 *Udowodnij, że* $\lim_{t\to\infty} \frac{W_t}{t} = 0$ p.n.

Zad 8 *Udowodnij, że następujące procesy też są procesami Wienera*

1. $X_t = -W_t$ *(odbicie);*

2. $Y_t = c^{-1/2} W_{ct}$, $c > 0$ *(przeskalowanie czasu);*

3. $Z_t = t W_{1/t}$ *dla* $t > 0$ *oraz* $Z_0 = 0$*;*

4. $U_t = W_{T+t} - W_T$, $T \geqslant 0$*;*

5. $V_t = W_t$ *dla* $t \leqslant T$, $V_t = 2W_T - W_t$ *dla* $t > T$, *gdzie* $T \geqslant 0$.

Zad 9 *Niech* $\pi_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, ..., t_{k_n}^{(n)}\}$, *gdzie* $a = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < ... < t_{k_n}^{(n)} = b$ *będzie ciągiem podziałów odcinka* $[a, b]$ *oraz* $\|\pi_n\| = \max_k |t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}|$ *oznacza średnicę podziału* π_n. *Udowodnij, że*

$$S_n = \sum_{k=1}^{k_n} |W_{t_k^{(n)}} - W_{t_{k-1}^{(n)}}| \to b - a \quad w \quad L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}),$$

jeśli $\|\pi_n\| \to 0$ *oraz* $S_n \to b - a$, p.n., *jeśli* $\sum_{n\geqslant 0} \|\pi_n\| < \infty$.

Zad 10 *Udowodnij, że trajektorie procesu Wienera mają nieskończone wahanie na każdym przedziale.*

Zad 11 *Znajdź rozkład wektora losowego* $(W_{t_1}, ..., W_{t_n})$ *dla* $0 < t_1 < ..., < t_n$.