Zadania z RP 2. seria 1.

1. Dla $x \in \mathbb{R}^n$, niech δ_x oznacza miarę Diraca, skupioną w punkcie x. Wykazać, że dla dowolnego ciągu $x_n \in \mathbb{R}^n$ zachodzi

$$\delta_{x_n} \Rightarrow \delta_x \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x_n \to x.$$

2. Podać przykład rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ, takich, że $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale $\mu_n(A) \nrightarrow \mu(A)$ dla pewnego zbioru A.

3. Niech S będzie przeliczalnym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, zaś μ_n, μ - miarami probabilistycznymi skupionymi na S. Wykazać, że

   a) jeśli dla każdego $x \in S$, $\mu_n(\{x\}) \to \mu(\{x\})$, to $\mu_n \Rightarrow \mu$,

   b) jeśli S ma tylko punkty izolowane, to implikację z punktu a) można odwrócić,

   c) punkt b) jest nieprawdziwy, jeśli opuścimy założenie, że każdy punkt zbioru S jest izolowany.

4. Niech $\mathrm{B}(p, n)$ oznacza rozkład Bernoulliego o n próbach z prawdopodobieństwem sukcesu p, a $\mathrm{Poiss}(\lambda)$ - rozkład Poissona z parametrem λ. Wykazać, że jeśli $p_n n \to \lambda$, to $\mathrm{B}(p_n, n) \Rightarrow \mathrm{Poiss}(\lambda)$.

5. Niech f_n, f oznaczają odpowiednio gęstości rozkładów prawdopodobieństwa μ_n, μ na $\mathbb{R}^n$. Wykazać, że jeśli $f_n \to f$ p.w., to $\mu_n \Rightarrow \mu$, ale niekoniecznie na odwrót.

6. Wykazać, że zmienne losowe mające gęstości mogą zbiegać do stałej.

7. Udowodnij, że $\mathcal{N}(a_n, \sigma_n^2) \Rightarrow \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_n \to a$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

8. Niech zmienne losowe X_n, X będą określone na jednej przestrzeni probabilistycznej. Wykazać, że jeśli $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} X$ (zbieżność wg prawdopodobieństwa), to $X_n \Rightarrow X$, ale implikacja odwrotna nie musi być prawdziwa.

9. Wykazać, że jeśli $X_n \Rightarrow c$, dla pewnej stałej c, to $X_n \xrightarrow{\mathbf{P}} c$.

10. Podać przykład ciągu dystrybuant F_n, zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą.

11. Podać przykład ciągu zmiennych losowych X_n, zbieżnego wg rozkładu, takiego, że odpowiadający mu ciąg dystrybuant nie zbiega punktowo do dystrybuanty rozkładu granicznego.

12. Udowodnić twierdzenie Diniego: jeśli ciąg dystrybuant F_n zbiega punktowo do dystrybuanty ciągłej F, to zbieżność jest jednostajna. Czy założenie ciągłości F jest istotne?

13. Wykazać, że jeśli dla wszystkich n, X_n jest niezależne od Y_n oraz X jest niezależne od Y, to $(X_n, Y_n) \Rightarrow (X, Y)$.

Zadania z RP 2. seria 1.

1. Obliczyć funkcje charakterystyczne rozkładów
   (a) dyskretnych - dwupunktowego, geometrycznego, Bernoulliego, Poissona;
   (b) ciągłych - normalnego, jednostajnego, wykładniczego, dwustronnego wykładniczego, Cauchy'ego.
2. Przy pomocy funkcji charakterystycznych sprawdzić, że zmienna losowa $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\varepsilon_n$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1,1]$.
3. Niech X będzie zmienną losową taką, że $\mathbf{P}(X\in\mathbb{Z})=1$. Pokaż, że dla każdego $n\in\mathbb{Z}$,
$$\mathbf{P}(X=n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-itn}\varphi_X(t)dt.$$
4. Pokazać, że kombinacje wypukłe funkcji charakterystycznych są funkcjami charakterystycznymi.
5. Wiadomo, że φ jest funkcją charakterystyczną pewnej zmiennej losowej X. Czy funkcjami charakterystycznymi są : φ^2, $\mathrm{Re}\varphi$, $|\varphi|^2$, $|\varphi|$?
6. Udowodnić, że jeśli funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ma drugą pochodną w zerze, to $\mathbf{E}X^2<\infty$.
7. **Twierdzenie Riemanna-Lebesgue'a** Wykazać, że jeśli X jest zmienną losową o rozkładzie ciągłym, to $\varphi_X(t)\to 0$, gdy $|t|\to\infty$.
8. Udowodnić, że $\varphi(t)=e^{-|t|^\alpha}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $\alpha>2$.

Zadania z RP 2. Seria 3.

1. Dana jest rodzina rozkładów

   a) wykładniczych $\{\mathrm{Exp}(\lambda) : \lambda \in A\}$, $A \subseteq \mathbb{R}_+$,

   b) jednostajnych $\{U(a,b) : a, b \in A,\ a < b\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

   Jaki warunek musi spełniać zbiór A, aby ta rodzina była ciasna?

2. Zmienne X, Y są niezależne, przy czym X i $X+Y$ mają rozkłady normalne. Udowodnić, że zmienna Y ma także rozkład normalny lub jest stała p.n.

3. Zmienne X, Y, ε są niezależne, przy czym X, Y mają rozkład wykładniczy z parametrem λ, a rozkład ε zadany jest następująco: $P(\varepsilon = \pm 1) = \frac{1}{2}$. Wykazać, że zmienna $X - Y$ ma ten sam rozkład, co zmienna εX.

4. Zmienne losowe X, Y są niezależne, przy czym X ma rozkład jednostajny $U(0,1)$, natomiast Y ma rozkład zadany następująco:
$$\mathbf{P}(Y = k) = \frac{1}{n},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$
   Wyznaczyć rozkład zmiennej $X + Y$.

5. Dany jest ciąg $(X_n)_n$ zmiennych losowych zbieżny według rozkładu do X oraz dwa ciągi liczbowe (a_n), (b_n). Wykazać, że jeśli $a_n \to a$ oraz $b_n \to b$, to zmienne $a_n X_n + b_n$ zbiegają słabo do $aX + b$.

6. Zmienne losowe X_1, X_2, $\ldots$, X_n są niezależne i mają ten sam rozkład, przy czym zmienna $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennych X_i.

7. Dla $n \geqslant 1$ zmienna X_n ma rozkład geometryczny z parametrem $p_n \in (0,1)$. Wykazać, że jeśli $(a_n)_n$ jest takim ciągiem liczb dodatnich, że $a_n \to 0$, $p_n/a_n \to \lambda > 0$, to zmienne $a_n X_n$ zbiegają słabo do rozkładu wykładniczego z parametrem λ.

8. Niech X będzie zmienną o rozkładzie jednostajnym $U(-1,1)$. Rozstrzygnąć, czy istnieje zmienna Y, niezależna od X, taka, że rozkłady zmiennych $X + Y$ i $2Y$ są takie same.

9. Zmienne $X_1,\ X_2,\ \ldots$ są niezależne i mają rozkład Cauchy'ego. Wykazać, że zmienne $Y_n = \frac{1}{n}\max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i$ zbiega według rozkładu do $\frac{1}{Y}$, gdzie Y jest zmienną o rozkładzie $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\pi})$.

Zadania z RP 2. seria 4.

1. Udowodnij, że układ trójkątny $X_{n,k} = \frac{X_k}{\sqrt{n}}$, $1 \leqslant k \leqslant n$, gdzie X_n, $n = 1, 2, \ldots$, są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, spełnia warunek Lindeberga.

2. Dane są niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$, o wspólnym rozkładzie z wartością oczekiwaną równą 0 i dodatnią wariancją. Wyznaczyć w zależności od $a, \alpha \in \mathbb{R}$
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\left|\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n^\alpha}\right| > a\right).$$

3. Zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots$ są niezależne, mają ten sam rozkład taki, że $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 1$. Zbadać zbieżność względem rozkładu ciągów
$$U_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + \ldots, X_n)}{X_1^2 + \ldots + X_n^2}, \quad V_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \ldots + X_n^2}}.$$

4. Powiemy, że układ trójkątny $(X_{n,k})$ spełnia warunek Lyapunowa,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{E}|X_{n,k} - \mathbf{E}X_{n,k}|^{2+\delta} = 0.$$
Wykazać, że warunek Lyapunowa implikuje warunek Lindeberga.

5. Rzucono 1000 razy kostką. Oszacować prawdopodobieństwo, że suma wyrzuconych oczek będzie zawarta między 3410 a 3590.

6. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, takimi, że
$$\mathbf{P}(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n^2}), \quad \mathbf{P}(X_n = \pm n) = \frac{1}{2n^2}.$$
Wykazać, że
$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{\sqrt{n}} \Rightarrow \mathcal{N}(0,1),$$
ale $\mathrm{Var}(X_n) \to 2$.

7. Niech X będzie całkowalną z kwadratem zmienną losową, taką, że $X \sim \frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$, gdzie Y, Z - niezależne kopie X. Wykazać, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

8. (*) Niech $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Wykazać, że dla dowolnej funkcji gładkiej o zwartym nośniku $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, zachodzi

$$\mathrm{Var} f(X) \leqslant \mathbf{E}|f'(X)|^2.$$