Seria 9.

1. Wykazać, że jeśli $(X_k)_{k=1}^n$ jest martyngałem, $p > 1$,
$$\mathbf{E}\sup_{k\leqslant n}|X_k|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbf{E}|X_n|^p.$$

2. Pokaż, przy pomocy martyngałów z czasem odwróconym, mocne prawo wielkich liczb. To znaczy jeśli $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, gdzie $(X_k)_{k=1}^\infty$ jest ciągiem zmiennych niezależnych o tym samym rozkładzie i wartości oczekiwanej $\frac{S_n}{n} \to m$ prawie na pewno i w L_1

3. Pokazać przykład łańcucha Markowa $X_0, X_1, ...$ i dowolnej funkcji borelowskiej f takich, że $f(X_0), f(X_1), ...$ nie jest łańcuchem Markowa.

4. k kul białych i k kul czarnych umieszczone w dwóch pudełkach, po k kul w każdym. Stan układu opisany jest przez podanie liczby kul białych w pierwszym pudełku. Przejście pomiędzy stanami odbywa się w następujący w sposób: z obu pudełek losujemy po jednej kuli (niezależnie od siebie), po czym zamieniamy dla kul pudełka. Znaleźć macierz przejścia dla takiego łańcucha Markowa.

5. Przeprowadź klasyfikację stanów dla macierzy
$$\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

6. Udowodnić równość
$$p_{kj}(n) = \sum_{m=1}^{n} f_{kj}(m)p_{jj}(n-m) = \sum_{m=0}^{n-1} f_{kj}(n-m)p_{jj}(m).$$

7. Wykazać, że dla stanu chwilowego
$$F_{ii} = \frac{P_i}{1+P_i}.$$

8. Wykazac, że jeśli stan j jest powracający oraz $i \to j$, to $\sum_{n=1}^\infty p_{ij}(n) = \infty$.

9. Udowodnić, że jesli łańcuch Markowa jest powracający, to $F_{ij} = 1$ dla każdych stanów i, j.

10. Czy łańcuch Markowa o macierzy przejścia
$$\left\{\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right\}$$
jest łańcuchem okresowym?