Seria 8.

1. Schemat Poyla: W urnie znajduje się b kul białych i c kul czarnych. Losujemy kulę i zwracamy ją z powrotem, dokłądjąc jeszcze a kul tego samego koloru co kula wylosowana. Następnie powtarzamy to doświadczenie z tą nową konfiguracją kul, itd. Niech $X_0 = b$, $X_n =$ liczba wyloswanych kul białych w urnie po n losowaniach, $n = 1, 2, ...$ Pokazać, że frakcje kul białych, tzn. $(\frac{X_n}{b+c+na})_{n=0}^{\infty}$ tworzą martyngał względem naturalnej filtracji.

2. Student X, jeden z 15-tu zdających egzamin, zna odpowiedź na 10 pytań z 30, które są wylosowywane przez kolejno zdających studentów i które nie są powtórnie używane. Od studentów, którzy już zdali student X dwowiaduje się które pytania zostały już wyloswoane. Jaka jest optymalna strategia (w którym momoencie wejsć na egzamin) by szanse na zdanie były największe?

3. Dwaj gracze rzucają monetą (być może niesymetryczną). Kapitał początkowy gracza A wynosi a złotych, gracza B b złotych. Gra się kończy, gdy jeden z graczy jest zrujnowany. Policz prawdopodobieństwo ruiny dla każdego z graczy.

4. Udowodnić wersję tożsamości Walda: jeśli $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, $\mathbf{E}\tau < \infty$,
$$\mathbf{E}(S_\tau - \tau\mathbf{E}X_1)^2 = \mathbf{E}\tau\mathbf{D}^2X_1.$$

5. Policz średni czas oczekiwania na ruinę któregoś z graczy w symetrycznym zgadnieniu ruiny.

6. Rozważmy ruinę gracza z barierą odbijającą w zerze i pochłaniającą w N. Gracz startuje z kapitału k. Policz średni czas trwania tej gry.

7. Niech τ i σ będą momentami stopu względem filtracji $(\mathcal{F}_t)_{t\in T}$. Udowodnij, że jeśli $\tau \leqslant \sigma$ to $\mathcal{F}_\tau \subset \mathcal{F}_\sigma$.

8. Zauważ, że jeśli $(X_t, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ jest nadmartyngałem (martyngałem) prawostronnie ciągłym to $(X_{t\wedge\tau}, \mathcal{F}_t)_{t\in T}$ również.

9. Pokaż, że jeśli X_k jest martyngałem, to $|X_k|$ jest podmartyngałem. Zauważ, że jeśli X_k jest podmartyngałem, to $|X_k|$ nie musi nim być.

10. Ciąg (X_n) jest martyngałem. Zbadać, czy są pod- nadmartyngałami ciągi: a) $(|X_n|^p)_n$ $p \geqslant 1$; b) $(X_n \wedge a)_n$; c)$(X_n \vee a)_n$; $(X_n^3)_n$.

11. Niech X_k będą niezależnymi zmiennymi o rozkładzie wykładniczym. Definiujemy zmienne $N_m := \inf\{k \geqslant 0 : X_1 + ...X_k \leqslant m\}$. Pokaż, że $N_m - m$ jest martyngałem o średniej 0.

12. Niech $(U_n)_n$ będzie ciągiem Bernouliego. Niech $\mathcal{F}(U_1, ..., U_n)$ i niech

$$Z_n = e^{a(U_1+...+U_n)-(na^2/2)}.$$

Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest nadmartyngałem. Zbadać zbieżność ciągu (Z_n) prawie na pewno i w L_1.

13. Pokazać na przykładzie, że ze zbieżności martyngału według prawdopodobieństwa nie wynika zbieżność prawie na pewno.

14. Niech $\int_0^1 |f(x)|dx < \infty$. Definujemy

$$f_n(x) = 2^n \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} f(y)dy, \ \ \forall \frac{k}{2^n} \leqslant x \leqslant \frac{k+1}{2^n}, \ k = 0, 1, ..., 2^n - 1,$$

dla $n = 1, 2, ...$ Udowodnić, że $f_n(x) \to f(x)$ prawie wszędzie i w L_1.

15. Niech $\xi_1, \xi_2, ...$ będą i.i.d $\geqslant 0$ o rozkładzie niejednopunktowym takie, że $\mathbf{E}\xi_1 = 1$ oraz

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\xi_n} = 0.$$

Wówczas zmienne $X_n = \xi_1 ... \xi_n$ tworzą martyngał zbieżny do 0 prawie na pewno, ale nie w L_1 .