Seria 7.

1. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi, zaś f mierzalną funkcją dwu zmiennych, taką że $\mathbf{E}|f(X,Y)| < \infty$. Udowodnić, że $\mathbf{E}(f(X,Y)|X) = \mathbf{E}_Y f(X,Y)$ p.n.

2. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o wspólnym rozkładzie, $\mathbf{E}|X_1| < \infty$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_n, S_{n+1}, \ldots)$. Wyznaczyć $\mathbf{E}(X_i|\mathcal{F}_n)$ dla $i, n \geq 1$.

3. Podać przykład zmiennych losowych X, Y, które nie są niezależne, ale $\mathbf{E}(X|Y) = \mathbf{E}X$.

4. Niech $X_1, X_2, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o średniej 0. Zdefiniujmy $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ oraz $Z_n = S_n^2 - \mathbf{D}^2 S_n$. Wykazać, że $(Z_n, \sigma(X_1, \ldots, X_n))$ jest martyngałem.

5. Niech X_n będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie i średniej 0, $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$. Zdefiniujmy
$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^{n} X_{k-1} X_k$$
Udowodnić, że $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

6. Niech ξ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathbf{P}(\xi_i = 1) = p$, $\mathbf{P}(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Niech $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oraz
$$Z_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\xi_1 + \ldots + \xi_n}$$
Wykazać, że ciąg $(Z_n, \mathcal{F}_n)$ jest martyngałem.

7. Niech τ_1, τ_2 będą momentami stopu. Udowodnić, że momentami stopu są także $\tau_1 \wedge \tau_2$ oraz $\tau_1 \vee \tau_2$.

8. Niech $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}}$ będzie filtracją, zaś $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ ciągiem zmiennych losowych, adaptowalnym do tej filtracji. Niech τ oznacza moment pierwszej wizyty ciągu X_t w zbiorze borelowskim B. Wykazać, że τ jest momentem zatrzymania.

9. Niech (X_i) będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{U}[0,1]$. Zdefiniujmy $\tau = \inf\{n\colon X_1 + \ldots + X_n \geq 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}\tau$.

10. Podać przykład momentu zatrzymania τ, takiego, że $\sigma(\tau) \neq \mathcal{F}_\tau$.

11. Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$, gdzie $\varepsilon_i, \varepsilon_2 \ldots$ - niezależne zmienne Rademachera. Niech $\tau = \inf\{n\colon S_n = 1\}$. Wykazać, że $\mathbf{E}\tau = \infty$.

12. Rzucamy kostką tak długo, aż otrzymamy wszystkie oczka. Znaleźć wartość średnią sumy wyrzuconych oczek.