Seria 6.

1. Niech $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |\cdot|)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. Zmienna losowa X dana jest wzorem $X(\omega) = \omega$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|\mathcal{F})$.

2. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkłady

   a) Poissona z parametrami λ, μ, odpowiednio,

   b) Bernoulliego $B(n,p)$, $B(m,p)$, odpowiednio.

   Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|X+Y)$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny $U([0,n])$. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X|[X])$, gdzie $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

4. Podać przykład niezależnych zmiennych losowych X, Y i σ-ciała $\mathcal{F}$ takich, że

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F}) \neq \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}).$$

5. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi, a $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem. Udowodnić, że

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{F})Y) = \mathbb{E}(X\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})).$$

6. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają rozkład jednostajny $U(0,1)$. Wyznaczyć

   (a) $\mathbb{E}(X-Y|X+Y)$,

   (b) $\mathbb{E}(X+Y|X-Y)$.

7. Zmienne losowe X, Y są niezależne i $\mathbb{E}(X|X+Y) = X$. Udowodnić, że Y jest stała p.n.

8. Udowodnić, że zmienna losowa X ma rozkład symetryczny wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{E}(X|X^2) = 0$.

9. Zmienne X_1, X_2, $\ldots$, X_n są niezależne i mają ten sam rozkład. Wyznaczyć $\mathbb{E}(X_1|X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

10. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład $N(0,1)$. Wyznaczyć

    (a) $\mathbb{E}(X|aX+bY)$, gdzie a, b są ustalonymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $(a,b) \neq (0,0)$,

    (b) $\mathbb{E}(XY|X+Y)$.