Seria 5.

1. Niech $X, X_1, X_2, ..., X_n$ bedą niezależnymi wektorami losowymi o tym samym rozkładzie, przy czym $\mathbb{E}X = 0$ i współrzędne wektora X mają skończone wariancje. Znaleźć rozkład graniczny dla ciągu wektorów losowych

$$Z_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n}.$$

2. Wykazać, że jeśli X i Y są niezależnymi zmienymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $(0,1)$, to

$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y), \ \text{ i } \ V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$

są niezależnymi zmiennymi losowymi z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

3. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z prametrem λ. Znajdź rozkład zmiennej

$$Z = \frac{\sum_{i=k}^{N} X_k}{\sqrt{N}},$$

gdzie X_i *i.i.d.* z rozkładu $\mathcal{N}(0,1)$.

4. Udowodnij, że macierz $a_{i,j} = \frac{\cos(i-j)}{1+(i-j)^2}$ $1 \leqslant i, j \leqslant n$ jest dodatnio określona.

   Uwaga. Jeśli macierze $(a_{i,j})$, $(b_{i,j})$ są dodatnio określone, to $(a_{i,j}b_{i,j})$ również.

5. Wykazać, że dla rzeczywistej funkcji charakterystycznej zachodzi nierówność

$$1 + \phi(2t) \geqslant 2(\phi(t))^2.$$

6. Niech X_k będą zmiennymi losowymi niezleżnymi z rozkładu:

   (a) geometrycznego;

   (b) jednostajnego na $(0,1)$;

   (c) $(*)$ normalnego $\mathcal{N}(0,1)$.

   Znajdź funkcję charakterystyczną rozkładu zmiennej

$$Z_a := \inf\{i \geqslant 1 : \ \sum_{k=1}^{n} X_k \geqslant a\},$$

   gdzie $a > 0$ jest pewną liczbą rzeczywistą.

7. Zmienne losowe X_i są niezależne i mają ten sam rozkład: $P(X_i = a) = P(X_i = 1/a)$, przy czym $a > 1$. Zbadać zbieżność według rozkłądu zmiennych losowych $Z_n = (X_1 ... X_n)^{1/\sqrt{n}}$.

8. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną wektora losowego $AX + b$ zakładając, że znamy funkcję wektora X.

9. Udowodnić, że jeśli zmienne X_k $k = 1, 2, ...$, są niezleżne z tego samego rozkładu, $\mathbb{E}X_k = 0$, $\mathbb{E}X_k^2 = \sigma^2$, f jest rózniczkowalna w zerze, to

$$\sqrt{n}(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \sigma f^{'}(0)),$$

gdzie $Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$.

10. Niech X_k będą niezleżnymi zmiennymi losowymi gaussowskim o tym samym rozkładzie. Udowodnij, że zmienne $S_n = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n)$ i $D_n = \frac{1}{n}((X_1 - S_n)^2 + ... + (X_n - S_n)^2)$ są niezależne.

11. Podaj przykład zmiennych gaussowskich X, Y nieskorelowanych ale zależnych.