Zadania domowe 7

1 kwietnia 2004

1. (Oszacowanie dokładności przybliżenia w tw. Poissona) Pokazać, że dla $n = 1, 2, ...,$ $k = 0, 1, ..., n$, $0 < p < 1$, zachodzi nierówność

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\frac{\lambda k}{n}} \geqslant \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \geqslant \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} e^{-\frac{\lambda^2}{n-\lambda} - \frac{k^2}{n-k}},$$

gdzie oznaczyliśmy $\lambda = np$.
Wskazówka Skorzystać z nierówności $e^{-\frac{x}{1-x}} < 1 - x < e^{-x}$ dla $0 < x < 1$.

2. Rzucono 10000 razy monetą i okazało się, że orzeł wypadł 5400 razy. Czy są podstawy żeby przypuszczać, że moneta jest niesymetryczna?

3. W pewnym doswiadczeniu prwdopodobieństwo zajścia zdarzenia A wynosi 0.7. Ile razy trzeba powtórzyć to doświadczenie, żeby z prawdopdobieństwem 0.9 częstość zajścia zdarzenia A nie różniła się od 0.7 o więcej niż 0.1? Czy można coś powiedzieć o potrzebnej liczbie powtórzeń, gdy nie znamy prawdodpodbieństwa zdarzenia A?

4. Dlaczego mamy pecha jeśli czekamy na autobus całkowicie losowo? Niech $X_1, ..., X_n$ i.i.d. z rozkładu wykładneiczego z parametrem λ. Ozanczmy $S_n = X_1 + ... + X_n$, $n = 1, 2, ...,$ $S_0 = 0$. Dla dowolnego $t > 0$ definiujemy $N_t = \max\{n : \ S_n \leqslant t\}$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y_t = S_{N_t+1} - t$.

5. Dlacezego mamy pecha? Zmienne $X_0, X_1, ...$ są i.i.d o ciągłej dystrybuancie. Definujemy $Y = \inf\{n : \ X_n > X_0\}$. Znaleźć rozkład X i obliczyć $\mathbf{E}Y$.