Zadania domowe 5

18 marca 2004

1. Znajdź gęstość zmiennej $Z = X + Y$, gdzie wektor (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-(x+y)}$.

2. Podaj przykład parami nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, które nie są niezależne.

3. Pokaza, że jeśli zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezalelażne, to zmienna

$$S = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}$$

również ma rozkład normalny. Przyjmujemy, że δ_0 jest zdegenerowanym rozkładem normalnym.

4. Udowodnij statysyczną inetrepretację rozkładu normalnego. To znaczy jeśli zmienne $X_1, ..., X_n$ są niezależne z rozkładu normalnego (niekonicznie i.i.d.), to estymator wartości oczekiwanej i wariancji

$$m = \frac{1}{n}(X_1 + ... + X_n), \quad \sigma = \frac{1}{n}((X_1 - m)^2 + ... + (X_n - m)^2)$$

są niezależne.
Można pokazać, że ta własność charakteryzuje rozkład normalny.

5. Niech $U = (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$ bedzie zbiorem statystyk pozycyjnych dla rozkładu jednostajnego na $[0, 1]$. Wykazać, że U ma rozkład jednostajny na zbiorze $\triangle_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbf{E}U_{(k)}$.