Zadania domowe 4

11 marca 2004

1. Niech X ma rozkład $\mathcal{N}(0,1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (jesli istnieją) dla zmiennych: $Y = e^X$, $Y = X^2$.

2. Zdefiniujmy
$$\gamma_{a,b}\frac{b^a}{\Gamma(a)}x^{a-1}e^{-bx}1_{(0,\infty)}(x), \quad a,b>0.$$
Wykazać, że zachodzi równość rozkładów
$$\gamma_{a_1,b} * \gamma_{a_2,b} = \gamma_{a_1+a_2,b}.$$

3. Udowodnij oszacowanie dla ogona rozkładu normalnego
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\frac{x}{1+x^2} < 1-\Phi(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\frac{1}{x}, \quad x>0.$$

4. Wykazać, że rozkład χ^2 o n stopniach swobody ma gestość $\gamma_{n/2,1/2}$.

5. Wykazać, że jeśli zmienne X i Y są niezależne i mają rozkład jednostajny na $(0,1)$, to
$$U = \sqrt{-2\log X}\cos(2\pi Y), \quad V = \sqrt{-2\log X}\sin(2\pi Y)$$
są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0,1)$.