Zadania domowe 2

26 lutego 2004

1. Mamy n urn wiemy, że r-ta urna zawiera $r-1$ kul czerownych i $n-r$ niebieskich. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy z niej bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że
   (a) Druga kula jest niebieska.
   (b) Druga kula jest niebieska jeśli pierwsza była niebieska.
2. Do kina ponumerowanego zbiorem $[n]$ przychodzi n-widzów. Pierwsza osoba losowo zajmuje złe miejsce. Każda następna osoba zajmuje swoje miejsce chyba, że jest zajęte. Wówczas losowo zajmuje jedno z pozostałych wolnych miejsc. Jaką szansę ma ostatnia osoba na zajęcie swojego miejsca.
3. Król Artur urządza turniej rycerski. Zorganizowany został systemem turniejowym. Każdy rycerz ma równe szanse na zwycięstwo; początkowe rozstawienie jest losowe. W turnieju bierze udział dwóch braci, jaka jest szansa na to, że będą walczyć ze sobą. Jaka jest szansa na to, że spotkają się w finale?
4. Zgubiliśmy się w ciemnym lesie, wyjście jest albo na wschodzie albo na zachodzie. Wiemy, że $\frac{2}{3}$ przebywających w zagajniku stanowią nam podobni, którzy mówią prawdę z $p=\frac{3}{4}$ oraz zjawy, które zawsze kłamią. Zadajemy pytania o kierunek do wyjścia, a odpowiedzi udzielane są w sposób niezależny (nawet jeśli spotkamy tę samą istotę i zadamy to samo pytanie).
   (a) Przypuśćmy, że spotkalismy tę samą istotę n-razy i za każdym razem udzielała tej samej odpowiedzi. Jaka jest szansa, że wskazała nam dobrą drogę?
   (b) Przypuśćmy, że spotkaliśmy tę samą istotę n-razy. Przy pierwszych $n-1$ spotkaniach udzielała tej samej odpowiedzi, ale ostatnim udzieliła odpowiedzi przeciwnej. Jaka jest szansa, że pierwszych $n-1$ odpowiedzi było prawdziwych.
5. $(*)$ Niech A_k będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez k. Wykazać, że nie istnieje takie prawdopodobieństwo P, że $P(A_k)=1/k$ dla $k \geqslant 1$.