Zadania domowe 10

6 maja 2004

1. Udowodnić, że jeśli X_n są niezależnymi zmiennymi losowymi, to promień zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{k=1}^{\infty} X_k z^k$, $z \in \mathbb{C}$ jest stały p.n.

2. Niech $\mathbf{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^3} = \mathbf{P}(X_n = -n)$, $\mathbf{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n^3}$. Wykazać, że $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ jest zbieżny p.n., chociaż $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}^2 X_n = \infty$.

3. Jeśli są niezależnymi zmiennymi, $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{E}X_i^2 < \infty$, to dla każdego $\epsilon > 0$
$$\mathbf{P}(\max_{k \leqslant n} |S_k| \leqslant \epsilon) \leqslant \frac{\mathbf{E}S_n^2}{\epsilon^2}.$$

4. Niech $X_1, X_2, ...$ będą i.i.d, a t ustaloną liczbą rzeczywistą. Udowodnij, że dystrybuanaty empiryczne, to znaczy zmienne postaci
$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(\infty, t]}(X_k)$$
zbiega prawie na pewno do dystrybuanty zmiennej X_1 w punkcie t.

5. Pokaż więcej dla prawie każdego ω zachodzi, że
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1_{(\infty, t]}(X_k(\omega)) = F_{X_1}(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$