Seria 8. Sumy niezależnych zmiennych losowych I

1. Niech $A_1, A_2, ...$ będą zdarzeniami niezależnymi. Oznaczmy $P(A_n) = p_n, N_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}, n \in \mathbb{N}_+$. Pokazać, że

$$\frac{N_n}{n} - \frac{p_1 + ... + p_n}{n} \to 0$$

według prawdopodobieństwa, gdy $n \to \infty$.

2. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem i.i.d o rozkładzie jedostajnym na $[0, a]$ ($a > 0$). Pokazać, że ciąg

$$\frac{X_1 X_2 + ... X_n X_{n+1}}{n}$$

jest zbieżny prawie na pewno i znaleźć granicę.

3. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem i.i.d o skończonej wariancji. Oznaczmy

$$\overline{m}_n = \frac{X_1 + ... X_n}{n}, \quad \overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \overline{m}_n)^2.$$

Pokazać, że $\overline{\sigma}_n^2 \to D^2 X_1$ p.n.. (Statystycy nazywają $\overline{m}_n$ średnią empiryczną a $\overline{\sigma}_n^2$ wariancją empiryczną.

4. (Twierdzenie Chinczyna) Udowodnić, że jeśli (X_n) jest ciągiem zmiennych losowych parami niezależnych o jednakowym rozkładzie i skończonej wartości oczekiwanej to dla (X_n) zachodzi SPWL.

5. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem i.i.d nieujemnych $\mathbb{E}X_n = \infty$. Pokazać, że

$$\lim_{n \to \infty} \frac{X_1 + ... + X_n}{n} = \infty \text{ p.n.}$$

6. $X_1, X_2, ...$ są i.i.d., $P(X_n = 1) = p$, $P(X_n = -1) = 1 - p$, przy czym $1 > p > 1/2$. Pokazać, że $X_1 + ... + X_n \to \infty$ p.n., gdy $n \to \infty$.

7. W firmie są dwa stanowiska kontroli, które działają niezależnie. Każdy produkt badany jest zarówno na pierwszym jak i na drugim stanowisku. Poddano kontroli dużą partię towaru. W jej wyniku pierwsze stanowisko wykryło 100 wadliwych produktów, drugie 140, przy czym 80 zostało wykrytych zarówno przez pierwszą jak i drugą kontrolę. Jakie jest p-stwo wykrywania wadliwych produktów na pierwszym, a jakie na drugim stanowisku?

8. Korzystając z nierówności Brensteina udowodnić, że w schemacie Bernouliego

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = p \text{ p.n.}$$

9. W Warszawie na Ursynowie ginie średnio 7 samochodów tygodniowo. Jaka jest szansa, że jutro będzie "dzień bez kradzieży", przy założeniu stałej intenstywności działania zołdziei.

10. Na podstawie losowej próby szacujemy procent dorosłych osób, które umieją czytać i pisać. Wiadomo na pewno, że jest to ponad 90 procent populacji, a błąd ma być mniejszy niż $0,001$ z pstwem $0,95$. Ile osób musi liczyć próba.

11. Na wykładzie z RP1 jest 100 osób. Studenci uczą się średnio 73 dni w ciągu roku (365 dni). Ile należy wybrać studentów, żeby z pstwem co najmniej $0,95$ w tej grupie znalazł się student który właśnie się uczy. Zastosować przybliżenie a) Poissona, b) De Moivre'a-Laplace'a.

12. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi $0,517$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród $n = 10000$ noworodków liczba chłopców nie przewyższy liczby dziewcząt.

13. Wyznaczyć przybliżenia prawdopodobieństw otrzymania w n rzutach symetryczną monetą co najmniej 60 procent orłów dla $n = 10$, 100 i 1000.

14. Mamy 256 rzutów monetą. Wypadło nam 150 orłów. Czy możemy twierdzić, że moneta jest symetryczna? Jaka będzie odpowiedź jeśli w próbie 2560 rzutów wyapdnie 1500 orłów.

15. $(*)$ Podać przykład ciągu zmiennych losowych o tym samym rozkładzie, dla którego $S_n/n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$, ale nie ma zbieżności p.n.

Do domu zadania: 3,5,10,11,15$(*)$