Seria 7. Warunkowa wartość oczekiwana I

1. Punkt (X,Y) jest losowany z rozkładu jednostajnego na kole jednostkowym. Znajdź rozkład łączny (R,X), gdzie $R^2 = X^2 + Y^2$.

2. Mamy ciąg zmiennych losowych (X_n). Pokaż, że

   (a) $\exists X$ taka, że $X_n \overset{\text{p.n.}}{\to} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \lim_{N\to\infty} P(\bigcap_{m,n\geqslant N} |X_n - X_m| < \epsilon) = 1$.

   (b) $\exists X$ taka, że $X_n \overset{\text{P}}{\to} X \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \ \lim_{m,n\to\infty} P(|X_n - X_m| > \epsilon) = 0$.

3. Pokaż, że granica według prawdopodobieństwa jest wyznaczona jednoznacznie.

4. (Twierdzenie Pratta) Niech $X_n, Y_n, Z_n,\ X, Y, Z$ będą takimi zmiennymi losowymi, że $X_n \overset{\text{P}}{\to} X, Y_n \overset{\text{P}}{\to} Y, Z_n \overset{\text{P}}{\to} Z$ oraz $X_n \leqslant Y_n \leqslant Z_n$ p.n. dla wszystkich n. Jeśli

$$\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X, \quad \mathbb{E}Z_n \to \mathbb{E}Z, \quad \mathbb{E}|Z|, \mathbb{E}|X| < \infty,$$

   to $\mathbb{E}Y_n \to \mathbb{E}Y$, $\mathbb{E}|Y| < \infty$.

5. Udowodnić, że jeśli $|X_t| \leqslant Y$ dla $t \in I, \mathbb{E}Y < \infty$, to $\{X_t\}$ jest rodziną jednostajnie całkowalną. W szczególności skończona rodzina zmiennych losowych całkowalnych jest jednostajnie całkowalna.

6. Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_n$ jest zbieżny w L_p, $p \geqslant 1$, wtedy i tylko wtedy, gdy

   (a) Ciąg zmiennych $(X_n)_n$, jest zbieżny według prawdopodobieństwa,

   (b) $(|X_n|^p)_n$ są jednostajnie całkowalne.

7. Pokaż, że

   (a) $\mathbb{E}(aX + bY|Z) = a\mathbb{E}(X|Z) + b\mathbb{E}(Y|Z)$, $a, b \in \mathbb{R}$

   (b) $\mathbb{E}(Y|X) \geqslant 0$ jeśli $Y \geqslant 0$,

   (c) $\mathbb{E}(1|X) = 1$,

   (d) jeśli X, Y są niezależne, to $\mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(Y)$,

   (e) $\mathbb{E}(Yg(X)|X) = g(X)\mathbb{E}(Y|X)$ dla każdej odpowiedniej funkcji g,

   (f) $\mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X,Z)|X) = \mathbb{E}(Y|X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(Y|X)|X,Z))$.

8. Niech $\Omega = [0,1]$ P-miara Lebsgue'a na $[0,1]$. Znaleźć $\mathbb{E}(f|\mathcal{F})$, jeśli

   (a) $f(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{4}), [\frac{1}{4}, 1]$.

   (b) $f(x) = -x$, $\mathcal{F}$ jest σ-ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{1}{2}), [\frac{1}{3}, 1]$.

9. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernouliego przeprowadzonych aż do momentu uzyskania kolejno:

(a) sukcesu i porażki,

(b) dwóch sukcesów i porażki.

10. Pokaż, że zmienna losowa $X \geqslant 0$ o ciągłej dystrybuancie ma własność braku pamięci wtedy i tylko wtedy gdy spełnia warunek

$$\mathbb{E}(X|X > t) = c + t, ;\ t \geqslant 0,$$

gdzie c jest pewną stałą.

11. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem zmiennych iid, ze średnią μ. Niech N będzie zmienną przyjmującą wartości naturalne i niezależną od X_i. Niech $S = X_1 + X_2 + ... + X_N$. Pokaż, że $\mathbb{E}(S|N) = \mu N$. Wywnioskuj stąd, że $\mathbb{E}S = \mu \mathbb{E}N$.

12. Niech zmienne X, Y będą niezależne z rozkładu Poissona z parametrem λ. Znaleźć rozkład warunkowy zmiennej X pod warunkiem $X + Y = t$.

13. Niech zmienne X, Y będą niezależne z rozkładu $\mathcal{B}(n, p)$. Niech $Z = X + Y$. Pokaż, że rozkład warunkowy X, pod warunkiem $Z = m$ jest rozkładem hipergeometrycznym.

14. $(*)$ Pokaż, że rozkład

$$D^2(Y) = \mathbb{E}(D^2(Y|X)) + D^2(\mathbb{E}(Y|X)).$$

15. $(*)$ Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Znajdż warunkową wartość oczekiwaną

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^{N} \binom{2N}{2k} X^{2k} Y^{2N-2k} | X + Y\right).$$

16. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi loswoymi z rozkładu $\mathbb{N}(0, 1)$. Znajdź rozkład łączny $(X + Y, X - Y)$. Pokaż, że zmienne $X + Y$, $X - Y$ są niezależne.

Do domu zadania 2,6,10,13,14$(*)$,15$(*)$. Zadanie 16 zamiast zadania 10 z serii 6.