Seria 6. Zmienne losowe II

1. Wykazać, że jeśli $X > 0$ i $\mathbb{E}X > 0$, to

$$\frac{1}{\mathbb{E}X} \leqslant \mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right).$$

2. Udowodnić regułę trzech sigm. Jeśli $\mathcal{D}^2 X = \sigma^2 < \infty$, to

$$P(|X - \mathbb{E}X| > 3\sigma) \leqslant \frac{1}{9}.$$

3. Udowodnić nierówność Minkowskiego: $p \geqslant 1$

$$(\mathbb{E}|X+Y|^p))^{1/p} \leqslant (\mathbb{E}|X|^p))^{1/p} + (\mathbb{E}|Y|^p)^{1/p}.$$

4. Znajdź gęstość zmiennej $Z = X + Y$, gdzie wektor (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}1_{x,y>0}$.

5. Wykazać, że suma niezależnych zmiennych ma rozkład ciągły wtedy i tylko wtedy gdy choć jeden ze składników ma rozkład ciągły.

6. $(*)$ Podać przykład dwóch funkcji ciągłych, róznych od stałej, określonych na $[0,1]$, które potraktowane jako zmienne losowe (na $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), |\cdot|)$) są niezależne. Czy takie funkcje mogą być klasy C^1, czy mogą mieć wahanie skończone.

7. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y) - \min(X, Y)$, gdzie X i Y są niezależne i mają ten sam rozkład wykładniczy z parametrem λ. Wykazać, że U i V są niezależne.

8. Niech $U = (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$ bedzie zbiorem statystyk pozycyjnych dla rozkładu jednostajnego na $[0,1]$. Wykazać, że U ma rozkład jednostajny na zbiorze $\triangle_n = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leqslant x_1 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant 1\}$. Wyznaczyć $\mathbb{E}U_{(k)}$.

9. Niech (S_n) będzie ciągiem sygnałów w procesie Poissona. Wykazać, że wektor $(S_1/S_{n+1}, ..., S_n/S_{n+1})$ ma ten sam rozkład co U w poprzednim zadaniu.

10. Wykazać, że w procesie Poissona

$$P((S_1, ..., S_n) \in A | N_t = n) = P(tU \in A), \quad A \subset \triangle_n,$$

gdzie U jest wektorem statystyk pozycyjnych.

11. Niech (U_n) będzie ciągiem zmiennych z rozkładu Bernouliego, oznaczmy $S_n = U_1 + ... + U_n$. Wykazać, że

$$P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > r\right) \leqslant e^{-r^2/2}.$$

12. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależne z rozkładu wykładniczego $\mathcal{E}(\lambda)$. Pokaż, że suma $S = X_1 + ... + X_n$ ma rozkład $\gamma(n, \lambda)$.

13. Podaj przykład parami nieskorelowanych zmiennych losowych o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$, które nie są niezależne.

14. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależne z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$. Pokaż, że rozkład $X_1^2 + ... + X_n^2$ jest rozkładem $\chi^2(n)$ to znaczy ma gęstość $\gamma(n/2, 1/2)$.

15. Wykazać, że dla dowolnego ciągu rozkładów (μ_n) istnieje ciąg niezależnych zmiennych losowych (X_n) takich, że $X_n \sim \mu_n$

Do domu zadania 4,5,6($*$),10,12