Seria 5. Zmienne losowe I

1. Policz parametry rozkładów ciągłych:

   (a) rozkład jednostajny $\mathcal{U}(a, b)$;
   (b) rozkład wykładniczy $\mathcal{E}(\lambda)$;
   (c) rozkład gamma $\Gamma(a, b)$;
   (d) rozkład beta $\beta(a, b)$;
   (e) rozkład Cauchy'ego;
   (f) rozkład normalny $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$;
   (g) wielowymiarowy rozkład normalny;
   (h) rozkład chi-kwadrat χ^2.

2. Wektor losowy $U = (X, Y, Z)$ ma następującą własność: Zmienna losowa $aX + bY + cZ$ ma rozkład jednostajny na $[-1, 1]$ jeśli tylko $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Jaki rozkład ma U?

3. Pokaż, że rozkład wykładniczy ma własność braku pamięci. Jest to jedyny rozkład ciągły na $(0, \infty)$ o tej własności.

4. Znajdź C żeby dana funkacja była gęstością rozkładu:

   (a) $f(x) = C\{x(1-x)\}^{-1/2}$, $0 < x < 1$;
   (b) $f(x) = C\exp(-x - e^{-x})$, $x \in \mathbb{R}$;
   (c) $f(x) = C(1 + x^2)^{-m}$, $x \in \mathbb{R}$.

5. Znajdź gęstość zmiennej $= \frac{a}{1+X^2}$, gdzie X ma rozkład Cauchy'ego. Pokaż, że rozkład zmiennej $Y = X^{-1}$ również jest rozkładem Cauchy'ego.

6. Niech X i Y bedą zmiennymi niezależnymi o rozkładzie wykładniczym. Znajdź rozkład łączny $S = X + Y$ i $R = \frac{X}{X+Y}$.

7. Zmienna X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$. Wyznaczyć dystrybuanty i gęstości (jeśli istnieją) dla: a) $Y = e^X$; b) $Y = X^2$.

8. Niech Z będzie zmienną losową. Pokaż, że funkcja $g(p) = \log \mathbb{E}|Z|^p$ jest wypukła na przedziale określoności (tzn. dla p takich, że $\mathbb{E}|Z|^p < \infty$). Wywnioskuj stąd
$$(\mathbb{E}|Z^r|)^{1/r} \geqslant (\mathbb{E}|Z^s|)^{1/s}, \quad \forall r \geqslant s > 0.$$

9. Udowodnij, że jeśli $X \geqslant 0$:
$$\mathbb{E}X = \int_0^\infty P(X \geqslant t)dt;$$
$$\sum_{n=1}^\infty P(X \geqslant n) \leqslant \mathbb{E}X \leqslant 1 + \sum_{n=1}^\infty P(X \geqslant n).$$

10. Rzucamy kostką tak długo aż wyrzucimy wszystkie oczka. Znaleźć wartość oczekiwną liczby rzutów.

11. Niech X, Y będą zmienną losowymi o skończonej wariancji $\mathcal{D}^2 X \neq 0$. Wyznaczyć liczby a, b żeby $\mathbb{E}(Y - aX - b)^2$ była minimalna.

12. Wyznacz kurtozę dla rozkładu: a) jednostajnego; b) normalnego; c) wykładniczego.

13. Policz skośność dla rozkładów: a) Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$; b) gamma $\Gamma(a, b)$; c) Bernouliego $\mathcal{B}(n, p)$.

14. ($*$) Losujemy niezależnie cztery punkty w trójkącie ABC. Jakie jest prawdopodobieństwo, że żaden wylosowany punkt nie leży we wnętrzu trójkąta utworzonego przez trzy pozostałe wierzchołki?

15. Niech X zmienna losowa z rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$. Pokaż, że zachodzi oszacowanie dla dystrubuanty Φ tego rozkładu

$$(x^{-1} - x^{-3})e^{-\frac{1}{2}x^2} < \sqrt{2\pi}[1 - \Phi(x)] < x^{-1}e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad x > 0.$$

Do domu zadnia 3,6,13,14($*$),15