Seria 4. Niezależność zdarzeń

1. Rozpatrujemy schemat Bernouliego $b(n,p)$. Dowieść, że współczynnik przy s^k funkcji $g(s) = [1-(ps+q)^n](1-s)^{-1}$ jest równy prawdopodobieństwu wystąpienia nie więcej niż k sukcesów $k \in [n]$.

2. Niech przed dokonianiem doświadczenia istnieją dwie równoprawdopodobne i jedyne możliwe hiptoezy dotyczące pradopodobieństwa sukcesu w pojedynczym doświadczeniu: $p = \frac{2}{7}$ i $p = \frac{3}{7}$. Która z tych hipotez ma większe prawdopodobieństwo a posteriori, jeżeli wiadomo, że po przeprowadzeniu 452 niezależnych doświadczeń uzyskano 113 wyników.

3. Zdarzenia $A_1, ..., A_n, ...$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jaka jest szansa, że zajdzie nieskończenie wiele spośród zdarzeń A_n.

4. Mamy schemat Bernouliego $b(\infty, p)$. Przez A_n będziemy oznaczać zdarzenie polegające na tym, że w ciągu prób: $\{2^n+1, ..., 2^{n+1}\}$ wypadło nam więcej niż $(p+\epsilon)2^n$ sukcesów $(p+\epsilon \leqslant 1, \epsilon > 0)$. Pokaż, że prawie na pewno zachodzi co najwyżej skończenie wiele zdarzeń A_n.

5. Wykaż, że jeśli $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ są zmiennymi losowymi, to $\sup_{\alpha\in A} X_\alpha$ nie musi być zmienną losową.

6. Pokaż, że jeśli X jest zmienną losową, funkcja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska, wówczas $\phi(X)$ jest zmienną losową. Pokaż, że powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe, jeśli o ϕ założymy, że jest po prostu mierzalna (wg. miary Lebesgue'a).

7. Wykonujemy doświadczenia Bernouliego, aż do chwili otrzymania pierwszego sukcesu. Niech X czas oczekiwania na pierwszy sukces. Podaj rozkład zmiennej X. Podobny problem dla czasu oczekiwania na n-ty sukces.

8. Podać rozkłady dyskretne i ich charakterystyki (wartość oczekiwaną, wariancję, dystrybuantę)

   (a) Rozkład jednopunktowy δ_a;

   (b) Rozkład dwupunktowy;

   (c) Rozkład Bernouliego $\mathcal{B}(n,p)$;

   (d) Rozkład Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$;

   (e) Rozkład geometryczny;

   (f) Rozkład wielomianowy;

   (g) Rozkład ujemny dwumianowy;

   (h) Rozkład hipergeometryczny.

9. Udowodnić, że rozkład μ na $\mathbb{R}^n$ jest dyskretny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $j \leqslant n$ rozkład brzegowy μ_j jest dyskretny.

10. Udowodnić, że jeśli rozkład μ jest ciągły, to wszystkie rozkłady brzegowe są ciągłe. Pokaż, że implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

11. Pokaż, że rozkłan geometryczny ma własność braku pamięci, to znaczy

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s) \ \ \forall t, s \in \mathbb{N}.$$

Pokaż, że jest to jedyny taki rozkład o nośniku w zbiorze liczb naturalnych.

12. Niech F spełnia własności dystrybuanty. Pokaż, że funkcja

$$f(s) = \sup\{u : F(u) < s\}$$

jest dobrze okreslona na $\Omega = (0, 1)$. Jesli na Ω przyjmiemy miarę Lebesgue'a, to f będzie zmienną losową o dystrybuancie F.

13. Niech F_μ będzie dystrybuantą rozkładu μ. Udowodnić

    (a) $\mu(-\infty, x) = F_\mu(x-)$, $\mu(\{x\}) = F_\mu(x) - F_\mu(x-)$.

    (b) punkt x_0 jest punktem skoku rozkładu μ, $\Leftrightarrow$ F_μ jest nieciągła w x_0.

14. Ciągła dystrybuanta F posiada pochodną g. Pokaż, ze g jest gęstością dystrybuanty F.

15. Podać przykład ciągłej dystrybuanty, która nie ma gęstości. Podać warunki konieczne i wystarczające na dystrybuantę, aby gęstosć posiadała.

16. Podać przykład zmiennej losowej X o rozkładzie ciągłym i funkcji $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla której $\phi(X)$ ma rozkład skokowy. Pokaż, że jeśli rozkład zmiennej X jest ciągły, to dystrybuanta jest funkcją ciągłą.

17. Niech X będzie dyskretną zmienną losową

$$P(X = k) = (k(k + 1))^{-1} \ \ \forall k \in \mathbb{N}, \ k \geqslant 1.$$

Dla jakich wartości α będzie $\mathbb{E}(X^\alpha) < \infty$?

18. W urnie jest n kul ponumerownych liczbami $1, ..., n$. Losowo wybieramy k kul, a następnie dodajemy ich wartości. Otrzymujemy zmienną losową X, policz $\mathbb{E}X$.

19. W lesie żyje m łosi, n spośród nich zostało zakolczykowanych. Niech X będzie liczbą łosi które trzeba złapać (bez wypuszczania), aby wśród nich znalazło się l łosi zaznaczonych. Znajdź $P(X = k)$, znajdź $\mathbb{E}X$, $\mathcal{D}X$.

20. $(*)$ Niech $G = (V, E)$ będzie grafem skończonym. Dla każdego zbioru W wierzchołków i krawdędzi $e \in E$. Definiujemy funkcje

$$I_W(e) = \begin{cases} 1 & \text{e łączy } W \ i \ W^c \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Kładziemy $N_W = \sum_{e \in E} I_W(e)$. Pokaż, że istnieje $W \subset V$ taki, że $N_W \geqslant \frac{1}{2}|E|$.

Do domu zadania 2,4,15,19,20$(*)$