Seria 3. Prawdopodobieństwo warunkowe

1. Urna zawiera n kul białych i m czarnych. W sposób losowy wyciągnięto k kul, które okazały się jednego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowane kule są czarne.

2. Brydż. Gracz dostał 13 kart z 52, obejrzał 8 i stwierdził, że nie ma asa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że nie ma asa w ogóle.

3. Brydż. Jaka jest szansa, że każdy z graczy S, E i W ma co najmniej jednego asa, jeśli wiadomo, że N nie ma żadnego.

4. (Podstępy prawdopodobieństwa)

   (a) Niech $A_1, ..., A_n$ będą parami niezależne. Czy muszą one być niezależne zespołowo?

   (b) Budujemy cztery kości do gry: $(6,6,2,2,2,2)$, $(5,5,5,5,1,1)$, $(4,4,4,4,2,2)$, $(3,3,3,3,3,3)$. Grają dwie osoby, gra polega na wyborze kostki i rzucie. Czy istnieje taktyka pozwalająca ograć przyjaciół?

5. Pokazać, że jeśli $C \subset A \cap B$ i $P(B \backslash A) > 0$, to $P(C|A) > P(C|A \cup B)$. Korzystając z tego zauważyć, że prawdopodobieństwo zdarzenia, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma asa pik, jest większe od prawdopodobieństwa zdarzenia, że gracz A ma 4 asy, jeśli wiemy, że ma co najmniej jednego asa.

6. Wiemy, że: A, $B \cap C$, $B \cup C$ są niezależne, B i $A \cap C$ są niezależne oraz C i $A \cap B$ są niezależne. Pokazać, że zdarzenia A, B i C są niezależne.

7. Do metra, złożonego z n wagonów wsiada losowo k pasażerów ($k \geqslant n$). Jaka jest sznsa, że żaden wagon nie będzie pusty?

8. Za korupcję trzech więźniów: A, B, C ma zostać powieszonych. Król postanowił losowo jednego z nich ułaskawić. Więzień A ma znajomego starżnika, postanawia więc zapytać, który z jego współwięźniów zostanie stracony. Strażnik losowo wybiera odpowiedź. Jaką szansę na opuszczenie tego świata będzie miał A jeśli pozna tę prawdę?

9. Mamy n urn wiemy, że r-ta urna zawiera $r-1$ kul czerownych i $n-r$ niebieskich. Wybieramy losowo urnę, a następnie losujemy z niej bez zwracania dwie kule. Jakie jest prawdopodobieństwo, że

   (a) Druga kula jest niebieska.

   (b) Druga kula jest niebieska jeśli pierwsza była niebieska.

10. Czterech świadków A, B, C, D w swej mowie sądowej mówi prawdę z $p = \frac{1}{3}$ niezależnie od pozostałych. Z ich zeznań wynika, że A twierdzi, że B zaprzecza, że C deklaruje, że D kłamie. Jakie jest prawdopodobieństwo warunkowe, że D powiedział prawdę.

11. Zgubiliśmy się w ciemnym lesie, wyjście jest albo na wschodzie albo na zachodzie. Wiemy, że $\frac{2}{3}$ przebywających w zagajniku stanowią nam podobini, którzy mówią prawdę z $p = \frac{3}{4}$ oraz zjawy, które zawsze kłamią. Zadajemy pytania o kierunek, a odpowiedzi udzielane są w sposób niezależny

    (a) Przypuśćmy, że spotkalismy tę samą istotę n-razy i za każdym razem udzielała tej samej odpowiedzi. Jaka jest szansa, że wskazała nam dobrą drogę?

    (b) Przypuśćmy, że spotkaliśmy tę samą istotę n-razy. Przy pierwszych $n-1$ spotkaniach udzielała tej samej odpowiedzi, ale ostatnim razem przeciwnej. Jaka jest szansa, że pierwszych $n-1$ odpowiedzi było prwdziwych.

12. Nasz przyjaciel wpadł do tego samego lasu. Ma on przeświadczenie, że $P(E - \text{dobry kierunek}) = q$. Ponadto dobry kierunek i napotkanie konkretnej istoty są niezależne. Policz:

$$P(E - \text{dobry kierunek}|nE), \quad P(E - \text{dobry kierunek}|nW).$$

13. Niech $\Omega = [p]$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Niech $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ oraz $P(A) = |A|/p$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$. Przypuśćmy, że zdarzenia A i B są niezależne. Pokazać, że przynajmniej jedno z nich jest równe Ω lub $\emptyset$.

14. Mamy b kul białych i c kul czarnych. Po o wyciągnięciu kuli z urny wrzucamy ją z powrotem i dokładmy jeszcze d kul tego samego koloru. Jakie jest prawdopodobieństwo $p_{k,n}$ wyciągnięcia k kul czarnych w n losowaniach.

15. Gracz rzuca monetą. Może wygrać 1zł albo starcić 1zł. Jego początkowy kapitał wynosi x. Gra do moment kiedy wygra a, bądź straci wszystkie pieniądze. Jaka jest szansa, że się zrujnuje?

16. Wśród n monet jest jedna z dwoma orłami. Na wybranej losowo monecie wypadł orzeł m razy z rzędu. Jaka jest szansa, że to jest moneta z dwoma orłami.

17. Król Artur urządza turniej rycerski. Zorganizowany został systemem turniejowym. Każdy rycerz ma równe szanse na zwycięstwo; początkowe rozstawienie jest losowe. W turnieju bierze udział dwóch braci, jaka jest sznsa na to, że się spotkają. Jaka jest szansa na to, że spotkają się w finale?

18. Podać przykład zdarzeń A, B, C, dla których:

$$P(A|B) < P(A|B^c), \quad P(A|B \cap C) \geqslant P(A|B^c \cap C), \quad P(A|B \cap C^c) \geqslant P(A|B^c \cap C^c).$$

19. Do kina ponumerowanego zbiorem $[n]$ przychodzi n-widzów. Pierwsza osoba losowo zajmuje złe miejsce. Każda następna osoba zajmuje swoje miejsce chyba, że jest zajęte. Wówczas losowo zajmuje jedno z pozostałych wolnych miejsc. Jaką szansę ma ostatnia osoba na zajęcie swojego miejsca.

20. ($*$) Niech A_k będzie zbiorem liczb naturalnych podzielnych przez k. Wykazać, że nie istnieje takie prawdopodobieństwo P, że $P(A_k) = 1/k$ dla $k \geqslant 1$.

Do domu zadania 9,12,14,17,20($*$)