Seria 2. Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

1. Znajdź prawdopodobieństwo p tego, że w grupie m osób, urodzonych niezależnie w tym samym roku, 2 obchodzą urodziny tego samego dnia. Pokaż, że jeśli $m > 23$, wtedy $p > 1/2$.

2. Rzucamy n kostek. Obliczyć prawdopodobieństo, że suma wyrzuconych oczek będzie nie mniejsza niż $6n - 1$.

3. Z liczb $1, 2, ..., n$ wybieramy losowo dwie liczby. Jakie jest prawdopodobieństwo, że jedna z nich bedzie ostro mniejsza, a druga - ostro większa od danej liczby $k, \;\; 1 < k < n$?

4. Jakie jest prawdopodbieństwo, że w losowo wziętej permutacji n elementów, dwa dane elementy a i b nie będą sąsiadować ze sobą?

5. Z urny zawierającej kule o numerach $1, 2, ..., n$ losujemy k razy po jedenej kuli. Obliczyć prawdopodobieństwo, że numery wylosowanych zapisane w kolejności losowania utworzą ciąg rosnący, jeśli po każdym losowaniu kula:
   (a) zostaje zwrócona od urny przed następnym losowaniem;
   (b) nie zostaje zwrócona do urny.

6. Urna zawiera b kul niebieskich i r kul czerwonych. Losujemy kolejno kule bez zwracania. Znajdź prawdopdobieństwo tego, że $k + 1$ kula, którą wylosujemy będzie miała kolor czerowny.

7. Rzucamy n kostkami. Obliczyć prawdopodobieństwo wyrzucenia n_1 jedynek, n_2 dwójek, ..., n_6 szóstek $(n_1 + ... + n_6 = n)$.

8. Ile jest różnych rozwiązań równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 25$:
   (a) w zbiorze liczb całkowitych nieujemnych;
   (b) w zbiorze liczb naturalnych.

9. Co jest bardziej prawdopodobne: otrzymanie co najmniej jednej jedynki przy rzucie 4 kostkami, czy co najmniej raz dwóch jedynek na obu kostkach przy 24 rzutach dwiema kostkami?

10. Co jest bardziej prawdopodobne: uzyskanie co najmniej jednej szóstki w 6 rzutach, co najmniej dwóch szóstek w 12 rzutach, czy co najmniej trzech w 18?

11. Przy rzucie trzema kostkami sumę 11 i 12 oczek można otrzymać na tyle samo sposobów. Dlaczego częściej wypada suma 11 oczek?

12. Poker. Z 24 kart wybrano 5. Obliczyć jaka jest szansa otrzymania nastęujących układów:

(a) para, dwie pary, straight, trójka;

(b) full, kareta, kolor, poker.

13. Brydż. Znajdź prawdopodobieństwo usyskania rozkładów: $P(4S, 3H, 3D, 3C)$, $P(4S, 4H, 3D, 2C)$. Znajdź prawdopodobieństwo uzyskania rozkładów: $P(4, 3, 3, 3)$, $P(4, 4, 3, 2)$. Podać wartości przybliżone.

14. Rzucamy n razy prawidłową monetą. Jakie jest prawdopodbieństwo, że orzeł wypadnie nieparzystą liczbę razy.

15. Rzucamy prawidłową monetą. Znajdź prawdopdobieństwo tego, że r orłów wypadnie przed s reszkami $(s, r \in \mathbb{N})$.

16. W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek. Każda komórka moze zawierać dowolną liczbę cząstek. Zakładamy, że wszystkie rozmieszczenia są równoprawdopodbne. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

    (a) ustalona komórka zawiera dokładnie k cząstek;

    (b) dokładnie m komórek pozostało pustych $(m < n)$;

    (c) w każdej komórce są co najmniej dwie cząstki.

17. W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek. Każda komórka może zawierać co najwyżej jedną cząsteczkę. Zakładamy, że wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodbne. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że ustalona komórka jest pusta. $(r < n)$

18. W n rozróżnialnych komórkach rozmieszczono losowo r nierozróżnialnych cząstek. Każda komórka może zawierać nieograniczoną liczbę cząstek. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że

    (a) pierwsza komórka zawiera k_1 cząstek, druga k_2 cząstek itd.;

    (b) przy $n = r$ ani jedna komórka nie pozostała pusta;

    (c) przy $n = r$ dokładnie jedna komórka pozostała pusta;

    (d) dokładnie m komórek pozostało pustych.

19. Wiemy, że 10 procent sfery pomalowane jest na biało, pozostała część na czerwono. Pozkaż, że niezależnie od rozkładu kolorów na sferze, zawsze można w nią wpisać sześcian o czterech czerownych wierzchołkach.

20. $(*)$ Pchełka skacze po liczbach całkowitch. Startuje z 0, w każdej rundzie skacze albo o dwa w górę, albo o jeden w dół (z $p = 1/2$). Wiemy, że skoczyła m razy w górę i n razy w dół $(m \geqslant n)$. Znajdż prawdopodobieństwo tego, że pchełka nie znalazła się poniżej zera.

Do domu 6,13,15,19,20$(*)$