Seria 1. Opis doświadczenia losowego

1. Niech $\{A_i : i \in I\}$ będzie rodziną zbiorów. Udowodnij prawa 'De Morgan'a'

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c.$$

2. Niech A, B należą do σ-ciała $\mathcal{F}$. Pokaż, że zbiory $A \cap B$, $A\backslash B$ i $A \triangle B$ należą do σ ciałą $\mathcal{F}$.

3. Zapisz za pomocą operacji na zbiorach zdarzenie polegające na tym, że nie zdarzy się aby zaszły dokładnie dwa spośród zdarzeń A, B, C.

4. Zorganizowany został turniej tenisowy dla 2^n zawodników. Rozgrywany jest systemem pucharowym, a to znaczy, że trwa n rund. Zakładając, że początkowe rozstawienie zwodników jest dane oraz że ustalona jest 'drabinka', podaj opis przestrzeni zdarzeń. W szczególności policz ile jest możliwych wyników (tzn. rozgrywek całego turnieju).

5. Niech $\mathcal{F}$ będzie σ-ciałem przestrzeni Ω. Przypuśćmy, że $B \in \mathcal{F}$, pokaż, że $\mathcal{G} = \{A \cap B : A \in \mathcal{F}\}$ jest σ-ciałem podzbiorów przestrzeni B.

6. Które z poniższych równości są prawdziwe dla dowolnych A, B, C. Jeśli nie są spełnione zawsze, podaj warunki konieczne i wystarczające (aby zachodziły).

$$\text{(a)}\ \ A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \quad \text{(b)}\ \ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C;$$

$$\text{(c)}\ \ (A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C); \quad \text{(d)}\ \ A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C).$$

7. Opisać wszystkie σ-ciała w przypaku przeliczalnego zbioru Ω.

8. $(*)$ Ile jest wszystkich σ-ciał, jeśli Ω ma n elementów.

9. Udowdnij nierówność: dla dowolnych $A_i \in \mathcal{F}$, gdzie $i \in I$, I-przeliczalny, zachodzi

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) \leqslant \sum_{i\in I} P(A_i).$$

Jako zastosowanie wykaż, że jeśli $P(A_i) = 1$, to $P\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = 1$.

10. Udowodnij nierówności

$$P(A) + P(B) - 1 \leqslant P(A \cap B) \leqslant \min\{P(A), P(B)\}.$$

11. Niech A, B będą zdarzeniami takimi, że $P(A) = \frac{3}{4}$ $P(B) = \frac{1}{3}$. Pokaż, że $\frac{1}{12} \leqslant P(A \cap B) \leqslant \frac{1}{3}$. Zauważ, że obydwa kresy: górny i dolny, mogą być przyjmowane.

12. Przypuśmy, że wiemy, iż $P(A \cap B^c) = \frac{1}{3}$, $P(A \triangle B) = \frac{1}{2}$, $P(A^c \cap B^c) = \frac{1}{4}$. Oblicz $P(A)$, $P(B)$.

13. Jest 10 chłopców i 10 dziewczyn. Każdy chłopak ma swoją dziewczynę. Ustawiamy ich losowo obok siebie. Jaka jest sznsa na to, że żadna dziewczyna nie stoi obok swojego chlopaka?

14. Powtarzamy doświadzczenie polegające na rzucie prawidłową monetą. Pokaż, że

    (a) Prędzej czy później wypadnie reszka.

    (b) Prędzej czy później wypadnie dowolny z góry zadany ciąg skończony.

15. W chipsach 'xmax' można znaleźć plastykowe karty ze zdjęciami laureatów ostatnich pięciu edycji 'Idola'. Każda paczka zawiera dokładnie jedną kartę, ponadto prawdopodobieństwo, że konkretna paczka zawiera konkretnego idola jest równa $\frac{1}{5}$ i jest niezależne od pozostałych paczek. Kupujemy w sklepie sześć paczek. Pokaż, że prawdopodobieństwo, że znajdziemy karty ostatnich trzech idoli wynosi

$$1 - 3\left(\frac{4}{5}\right)^6 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^6 - \left(\frac{2}{5}\right)^6.$$

16. Mamy zdarzenia A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wiemy, że przynajmniej jedno z nich zachodzi oraz że jednocześnie nie zachodzą więcej niż dwa zdarzenia. Ponadto

$$P(A_i) = p, \quad P(A_i \cap A_j) = q \ \ \forall i < j.$$

    Udowodnij, że $p \geqslant 1/n$ i $q \leqslant 2/n$.

17. Mamy zdarzenia A_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Wiemy, że przynajmniej jedno z nich zachodzi oraz że jednocześnie nie zachodzą więcej niż trzy zdarzenia ($n \geqslant 3$). Prawdopodbieństwo, że pojawią się przynajmniej dwa wynosi $\frac{1}{2}$. Ponadto

$$P(A_i) = p, \quad P(A_i \cap A_j) = q \ \ \forall i < j, \quad P(A_i \cap A_j \cap A_k) = r \ \ \forall i < j < k.$$

    Wykaż, że $p \geqslant 3/(2n)$, $q \leqslant 4/n$.

    Wskazówka: Dwukrotnie skorzystaj z zasady włączeń i wyłączeń raz dla zdarzeń raz dla przecięć zdarzeń.

18. (Paradoks Bertranda) Z okręgu o promieniu 1 wybrano losowo cięciwę AB. Jaka jest szansa, że bedzie ona dłuższa niż bok trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg

19. (Igła Buffona) Igłę o długości l rzucono na podłogę z desek o szerokości a. Jaka jest szansa, że igła przetnie podłogę.

20. Na odcinku wybrano losowo dwa punkty, które dzielą go na trzy części. Jakie jest prawdopodbieństwo, że można z nich zbudować trójkąt.

Do domu zadania 7,8(∗),13,17,20.