

LOGIKA STOSOWANA

WYKŁAD 1 - LOGIKA ZDANIOWA

Marcin Szczuka

Instytut Informatyki UW

Wykład monograficzny, semestr letni 2018/2019

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

Język rachunku zdań składa się z następujących elementów:

1 Symbole:

- nieskończony zbiór zmiennych zdaniowych $VAR = \{p, q, r, \dots\}$
- 4 wyróżnione symbole: $\neg, \vee, (,)$.

2 Reguły składania:

Wprowadzamy przez definicję rekurencyjną pojęcie "*poprawnie zdefiniowanych formuł zdaniowych*" lub krótko *formuł zdaniowych*

- Zmienne zdaniowe ze zbioru $VAR = \{p, q, r, \dots\}$ są formułami zdaniowymi.
- Jeśli ϕ jest formułą zdaniową to $\neg\phi$ też jest formułą zdaniową
- Jeśli ϕ i ψ są formułami zdaniowymi, to $(\phi \vee \psi)$ jest formułą zdaniową.

Zbiór wszystkich poprawnie zdefiniowanych formuł oznaczamy przez *FORM*.

Symbole $\neg$ i $\vee$ nazywamy *spójnikami logicznymi* (lub *operatorami logicznymi*). Intuicyjnie, nawiasy są wprowadzone tylko po to, aby określić kolejność działania, dlatego mogą one być usunięte z języka.

W celu uproszczenia opisów oraz ułatwienia pisania formuł, wprowadzamy do języka dodatkowe stałe $\top$, $\perp$ oraz operatory $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, które są definiowane następująco:

$$\begin{aligned}\phi \wedge \psi &=_{def} \neg(\neg\phi \vee \neg\psi) \\ \phi \Rightarrow \psi &=_{def} \neg\phi \vee \psi \\ \phi \Leftrightarrow \psi &=_{def} (\neg\phi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \phi) \\ \top &=_{def} p \vee \neg p \text{ dla pewnej zmiennej } p \in VAR \\ \perp &=_{def} p \wedge \neg p \text{ dla pewnej zmiennej } p \in VAR\end{aligned}$$

Znaczenia operatorów logicznych i stałych (które mogą być traktowane jako operatory 0-argumentowe) zostaną podane w dalszej części wykładu.

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

ZNACZENIE (SEMANTYKA) SYMBOLI

Rozpatrujemy zbiór $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

Utożsamiamy 0 z wartością logiczną *FAŁSZ*, a 1 – *PRAWDA*.

Wówczas operatory logiczne są skojarzone z odpowiednimi funkcjami na $\mathcal{B}$.

Spójnik $\neg$ jest skojarzony z funkcją $\neg : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ taką, że $\neg(x) = 1 - x$.

Dwuczłonowe spójniki logiczne są skojarzone z funkcjami postaci

$$* : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$$

gdzie $*$ oznacza dowolny operator ze zbioru $\{\vee, \wedge, \rightarrow, \Leftrightarrow\}$. Funkcje te są definiowane przez następującą tabelkę (truth table):

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \rightarrow y$	$x \Leftrightarrow y$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Wartościowaniem nazywamy każdą funkcję

$$v : VAR \rightarrow \mathcal{B}$$

Dla każdego wartościowania możemy definiować (przez rekursję względem struktury) semantykę dla formuł, czyli funkcję :

$$\llbracket \cdot \rrbracket_v : FORM \rightarrow \mathcal{B}$$

(CONST) dla stałych

$$\llbracket \top \rrbracket_v = 1; \quad \llbracket \perp \rrbracket_v = 0$$

(VAR) dla zmiennych $p \in VAR$

$$\llbracket p \rrbracket_v = v(p)$$

($\neg$) dla dowolnej formuły $\phi \in FORM$

$$\llbracket \neg \phi \rrbracket_v = 1 - \llbracket \phi \rrbracket_v$$

($*$) dla dowolnych formuł $\phi, \psi \in FORM$

$$\llbracket \phi * \psi \rrbracket_v = \llbracket \phi \rrbracket_v * \llbracket \psi \rrbracket_v$$

gdzie $*$ jest dowolnym operatorem logicznym (np. $\vee, \wedge, \Rightarrow$).

- 1 JEZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

MODEL W RACHUNKU ZDAŃ

Mówimy, że wartościowanie v jest *modelem* dla formuły ϕ wtedy, i tylko wtedy, gdy

$$\llbracket \phi \rrbracket_v = 1$$

wówczas mówimy, że ϕ jest **prawdziwa w modelu** v .

W roku 1936, Tarski wprowadził pojęcie "wynikania logicznego" (lub relację "semantycznej konsekwencji"). Ta relacja jest zdefiniowana w sposób następujący.

KONSEKWENCJA SEMANTYCZNA (WYNIKANIE LOGICZNE)

Mówimy, że formuła ϕ wynika logicznie ze zbioru formuł Φ i piszemy

$$\Phi \models \phi$$

jeśli formuła ϕ jest prawdziwa w każdym modelu dla wszystkich formuł z Φ .

Formuły ϕ , dla których zachodzi relacja

$$\models \phi$$

(czyli są prawdziwe dla wszystkich wartościowań) nazywamy *tautologiami*.

Celem rachunku zdań jest opisywanie "*syntaktycznego wynikania*" dla relacji semantycznej konsekwencji $\models$ poprzez definiowanie przybliżonego, *formalnego systemu dedukcji* (system dowodzenia).

W dalszej części wykładu wprowadzimy taki system dedukcji (Hilbert), który później łatwo można będzie uogólnić w przypadku logiki modalnej. Każdy system dedukcji składa się ze zbioru aksjomatów i zbioru reguł dedukcyjnych.

PLAN WYKŁADU

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - Dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

SYSTEM DEDUKCYJNY

W przypadku rachunku zdań, system dedukcji składa się z:

- Aksjomatów. Aksjomatami są tautologie oraz formuły postaci

$$(k) \quad \phi \rightarrow (\theta \rightarrow \phi)$$

$$(l) \quad (\theta \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)) \rightarrow ((\theta \rightarrow \psi) \rightarrow (\theta \rightarrow \phi))$$

wraz z aksjomatami dotyczącymi innych spójników logicznych.

- Jednej reguły dedukcyjnej zwanej *modus ponens* lub *regułą odrywania*:

$$\frac{\theta \quad \theta \rightarrow \phi}{\phi} \quad (Modus\ ponens)$$

Powyższe aksjomaty i reguła zostaną użyte do zdefiniowania relacji “konsekwencji syntaktycznej” $\vdash$.

KONSEKWENCJA SYNTAKTYCZNA (DEDUKCJA)

Niech Φ będzie zbiorem formuł ($\Phi \subseteq FORM$).

(a) Przez **wywód** z Φ rozumiemy każdy ciąg formuł

$$\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$$

taki, że dla każdej formuły ϕ_i z ciągu, zachodzi co najmniej jeden z następujących warunków:

- ❶ $\phi_i \in \Phi$
- ❷ ϕ_i jest aksjomatem
- ❸ Istnieją formuły ϕ_j, ϕ_k występujące wcześniej w tym ciągu (tzn. $j, k < i$) takie, że $\phi_k = (\phi_j \rightarrow \phi_i)$

(b) Dla każdej formuły ϕ , relacja

$$\Phi \vdash \phi$$

zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy istnieje wywód z Φ , na końcu którego otrzymujemy ϕ .

PLAN WYKŁADU

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

Relacja $\Phi \vdash \phi$ jest symulacją pojęcia logicznej konsekwencji. Ten system ma, z definicji, "*własność dedukcyjną*":

WŁASNOŚĆ DEDUKCJI

Dla każdego zbioru formuł Φ oraz pary formuł θ, ϕ , zachodzi implikacja

$$\Phi, \theta \vdash \phi \quad \Rightarrow \quad \Phi \vdash (\theta \rightarrow \phi) \quad (1)$$

Niestety, ta ważna własność nie zachodzi dla większości systemów modalnych.

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

Pełność systemu logicznego to własność, która zrównuje ze sobą relacje konsekwencji semantycznej i syntaktycznej ($\models$ i $\vdash$). Zwykle dowód pełności dla systemu logicznego (formalnego) składa się z dwóch kroków:

- 1 Dowodu poprawności, to jest dowodu, że składnia jest OK. Oznacza to konieczność wykazania, że przez stosowanie konsekwencji syntaktycznej nie można wywieść fałszywych wniosków z prawdziwych przesłanek. Formalnie, zapisujemy to jako:

$$\Phi \vdash \phi \Rightarrow \Phi \models \phi$$

W naszym (zdaniowym) przypadku poprawność dowodzi się przez rutynową indukcję ze względu na długość (formalnego, dedukcyjnego) wywodu dla $\Phi \vdash \phi$.

- 2 Dowód “właściwej” pełności, to jest dowodu, że każde zdanie prawdziwe w przy przyjętych założeniach może być formalnie wywiedzione (wydedukowane). Formalnie, zapisujemy to jako:

$$\Phi \models \phi \Rightarrow \Phi \vdash \phi$$

PLAN WYKŁADU

- 1 JEZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - **Niesprzeczność**
 - Dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

Dowód własności drugiej na poprzednim slajdzie ($\Phi \models \phi \Rightarrow \Phi \vdash \phi$) jest często utożsamiany z dowodem pełności, gdyż własność 1 (poprawność – $\Phi \vdash \phi \Rightarrow \Phi \models \phi$) jest zwykle prosta do wykazania.

Istnieje wiele sposobów dowodzenia pełności dla systemów logicznych. My posłużymy się techniką wykorzystującą niesprzeczność, którą potem przeniesiemy na inne systemy logiczne (modalne).

NIESPRZECZNY ZBIÓR FORMUŁ

Mówimy, że zbiór formuł Φ jest *niesprzeczny* jeśli **nie zachodzi** relacja

$$\Phi \vdash \perp$$

Intuicyjnie, nie można wprowadzić fałszu do systemu przez użycie tylko niesprzecznych zbiorów formuł, aksjomatów i poprawnych reguł wnioskowania.

Niech **CON** będzie zbiorem wszystkich niesprzecznych zbiorów formuł Φ . Zbiór **CON** spełnia (z definicji) następujące warunki:

- 1 Dla każdego zbioru Φ mamy $\Phi \in \mathbf{CON}$ wtw, gdy $\Psi \in \mathbf{CON}$ dla każdego skończonego podzbioru $\Psi \subseteq \Phi$.
- 2 Dla każdej zmiennej $p \in VAR$ mamy $\{p, \neg p\} \notin \mathbf{CON}$ oraz, oczywiście $\{\perp\} \notin \mathbf{CON}$
- 3 Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ oraz dla dowolnych formuł ϕ, θ mamy

$$\begin{aligned}(\phi \wedge \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi, \theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \vee \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi, \neg\theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \rightarrow \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi, \neg\theta\} \in \mathbf{CON}\end{aligned}$$

Tę własność nazywamy **zachowywaniem koniunkcji**.

- ❶ Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ oraz dla dowolnych formuł ϕ, θ mamy

$$\begin{aligned} (\phi \vee \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\phi\} \in \mathbf{CON} \text{ lub } \Phi \cup \{\theta\} \in \mathbf{CON} \\ \neg(\phi \wedge \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi\} \in \mathbf{CON} \text{ lub } \Phi \cup \{\neg\theta\} \in \mathbf{CON} \\ (\phi \rightarrow \theta) \in \Phi &\Rightarrow \Phi \cup \{\neg\phi\} \in \mathbf{CON} \text{ lub } \Phi \cup \{\theta\} \in \mathbf{CON} \end{aligned}$$

Tę własność nazywamy **zachowywaniem dyzjunkcji (alternatywy)**.

- ❷ Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ i każdej formuły ϕ mamy

$$\neg\neg\phi \in \Phi \Rightarrow \Phi \cup \{\phi\} \in \mathbf{CON}$$

Tę własność nazywamy **zachowywaniem negacji**.

MAKSYMALNIE NIESPRZECZNY ZBIÓR FORMUŁ

Oznaczmy przez **MAXCON** rodzinę maksymalnie niesprzecznych zbiorów formuł, tzn. takich zbiorów $\Psi \in \mathbf{CON}$, że dla każdego zbioru formuł $\Phi \in \mathbf{CON}$ mamy

$$\text{jeśli } \Psi \subseteq \Phi \text{ to } \Psi = \Phi$$

Następujący lemat jest bardzo ważny dla dowodu pełności systemu dowodzenia.

LEMAT - ISTNIENIE MAXCON

Dla każdego zbioru $\Phi \in \mathbf{CON}$ istnieje $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}$ taki, że $\Phi \subseteq \Sigma$. Innymi słowy, pojęcie maksymalnie niesprzecznego zbioru formuł jest nietrywialne, a każdy niesprzeczny zbiór formuł może być rozszerzony do maksymalnego.

DOWÓD ISTNIENIA MAXCON

Niech $\{\psi_i : i < \omega\}$ będzie numeracją wszystkich formuł. Definiujemy ciąg zbiorów formuł $\{\Delta_r : r < \omega\}$ następująco:

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \Phi \\ \Delta_{r+1} &= \begin{cases} \Delta_r \cup \{\phi_r\} & \text{jeśli ten zbiór należy do } \mathbf{CON}, \\ \Delta_r & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}\end{aligned}$$

Zauważmy, że $\Delta \in \mathbf{CON}$ dla wszystkich $r < \omega$, wówczas definiujemy

$$\Sigma = \bigcup \{\Delta_r : r < \omega\} \in \mathbf{CON}$$

Z przeprowadzonej konstrukcji również mamy $\Sigma \in \mathbf{MAXCON}$.

- 1 JĘZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ**
 - niesprzeczność
 - Dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

TWIERDZENIE – ISTNIENIE MODELU

Każdy zbiór formuł $\Phi \in \mathbf{CON}$ ma model.

Dowód:

Niech Σ będzie maksymalnie niesprzecznym zbiorem formuł takim, że $\Phi \subseteq \Sigma$. Definiujemy wartościowanie $v_\Sigma : VAR \rightarrow \{0, 1\}$ następująco:

$$v_\Sigma(p) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } p \in \Sigma, \\ 0 & \text{jeśli } p \notin \Sigma. \end{cases}$$

Łatwo można pokazać, za pomocą indukcji, że wartościowanie v_Σ jest modelem dla (wszystkich formuł w) Φ . W kroku indukcyjnym wykorzystujemy własności zachowywania operacji (koniunkcji, dyzjunkcji i negacji) z definicji $\mathbf{CON}$.

TWIERDZENIE O PEŁNOŚCI

Dla każdego zbioru formuł Φ oraz każdej formuły ϕ mamy

$$\Phi \vdash \phi \quad \Leftrightarrow \quad \Phi \models \phi$$

Dowód: Implikacja ($\Rightarrow$) jest oczywista. Zatem wystarczy udowodnić ($\Leftarrow$). Załóżmy, że $\Phi \models \phi$, wówczas zbiór $\Phi \cup \{\neg\phi\}$ nie posiada modelu, i z tw. o istnieniu modelu mamy

$$\Phi \cup \{\neg\phi\} \notin \mathbf{CON} \text{ czyli } \Phi, \{\neg\phi\} \vdash \perp$$

Z własności dedukcji (por. wzór (1)) mamy

$$\Phi \vdash (\neg\phi \rightarrow \perp)$$

czyli (z pewnego aksjomatu/tautologii)

$$\Phi \vdash (\neg\perp \rightarrow \phi)$$

Ale wiemy, że $\Phi \vdash \neg\perp$ zawsze zachodzi, stąd mamy $\Phi \vdash \phi$. (Q.E.D.)

- 1 JEZYK RACHUNKU ZDAŃ
- 2 SEMATYKA DWUWARTOŚCIOWA (BINARNA)
- 3 WYNIKANIE LOGICZNE, MODEL
- 4 SKŁADNIA (SYNTAKTYKA)
 - Własność dedukcji
- 5 PEŁNOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ
 - niesprzeczność
 - dowód pełności
- 6 ZWARTOŚĆ

Zbiór formuł Φ jest niesprzeczny jeśli nie zachodzi relacja $\Phi \vdash \perp$, co oznacza (por. twierdzenie o pełności), że posiada on model tzn. istnieje wartościowanie, w którym wszystkie formuły z Φ są prawdziwe. Dlatego niesprzeczny zbiór formuł nazywamy również *spełnialnym*.

Rozważmy zadanie (problem decyzyjny) znane jako *problem spełnialności* zbioru formuł (SATisfiability – SAT).

SAT

Musimy zdecydować czy Φ jest spełnialny, czyli czy istnieje prawidłowe wartościowanie w którym wszystkie formuły z Φ są prawdziwe.

W świetle twierdzenia o pełności spełnialność zbioru formuł Φ można sprawdzać dwiema równoważnymi metodami:

- Metodą ekperymentalną: sprawdzenie czy istnieje model dla Φ wśród wszystkich możliwych wartościowań;
- Metodą teoretyczną: sprawdzenie czy można dowieść $\perp$ z Φ za pomocą reguł dedukcyjnych.

Wprowadzimy jeszcze jedną metodę sprawdzenia spełnialności zbioru formuł. Bazuje ona na pojęciu *zwartości* systemu logicznego. Pokażemy, że rachunek zdań jest zwarty i jak dzięki temu można pokazywać spełnialność zbiorów formuł.

TWIERDZENIE – ZWARTOŚĆ RACHUNKU ZDAŃ

Niech Φ będzie zbiorem formuł rachunku zdań.

Jeśli każdy skończony podzbiór zbioru formuł Φ ma model to Φ również ma model.

Dowód:

Założenie: Niech Φ będzie dowolnym zbiorem formuł spełniającym warunki twierdzenia, to jest takim, że każdy jego skończony podzbiór ma model.

Wystarczy teraz pokazać, że Φ jest niesprzeczny, a z tw. o pełności wynika, że ma model, czyli jest spełnialny.

Przyjmijmy (nie wprost), że Φ jest sprzeczny. Wtedy istnieje skończony wywód formalny

$$W = \langle \phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \perp \rangle$$

dla relacji $\Phi \vdash \perp$.

Wówczas istnieje skończony zbiór $\Psi \subseteq \Phi$, dla którego W również jest wywodem. Wystarczy wziąć jako Ψ zbiór wszystkich formuł występujących w W . Ale z tego wynika, że $\Psi \vdash \perp$, czyli skończony zbiór $\Psi \subseteq \Phi$ nie ma modelu co jest sprzeczne z **założeniem**.

(Q.E.D.)