Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Renata Gruszka
Numer albumu: 171781

Dowód twierdzenia Botta o periodyczności przy użyciu realizacji geometrycznych małych kategorii

Praca magisterska
na kierunku **MATEMATYKA**

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. Stefana Jackowskiego
Instytut Matematyki

listopad 2001

Pracę przedkładam do oceny
Data Podpis autora pracy

Praca jest gotowa do oceny przez recenzenta
Data Podpis autora pracy

Streszczenie
Praca zawiera dowód jednego z podstawowych twierdzeń topologicznej K – teorii, tj. twierdzenia Botta o periodyczności. Idea wykorzystania aparatu realizacji geometrycznych małych kategorii w przedstawionym przez nas dowodzie pochodzi od Bruno Harrisa (1980). W pracy uzupełniamy szczegóły dowodu Harrisa. Ponadto wprowadzamy pojęcie częściowego monoidu w kategorii małych kategorii topologicznych i formułujemy dowód w tych terminach, co sprzyja jego przejrzystości.

Słowa kluczowe
kategoria topologiczna, obiekt symplicjalny, realizacja geometryczna, włókno funktora, częściowy monoid, przestrzeń klasyfikująca, homotopijna równoważność

Klasyfikacja tematyczna według AMS Mathematical Subject Classification 2000
55R45 – Homology and homotopy of BO and BU; Bott periodicity
18G30 – Simplcial sets, siplicial objects (in a category)
55P10 – Homotopy equivalences

Spis treści

1 Wstęp

Twierdzenie Botta o periodyczności jest podstawowym twierdzeniem topologicznej K – teorii, sformułowanym i udowodnionym po raz pierwszy przez R. Botta w latach 50. XX wieku. W oryginalnym sformułowaniu R. Bott dowodził periodyczność grup homotopii grupy unitarnej U (gdzie U oznacza grupę przekształceń unitarnych przestrzeni $\mathbb{C}^\infty$, które są identycznością na podprzestrzeni skończonego kowymiaru), tj.

$$\pi_i(U) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{dla } i \text{ nieparzystych,} \\ 0 & \text{dla } i \text{ parzystych} \end{cases}$$

korzystając z nieskończenie wymiarowej teorii Morse'a.

Od tego czasu powstało kilka zasadniczo różnych dowodów twierdzenia Botta, korzystających z narzędzi wielu działów matematyki. Zazwyczaj w owych dowodach nie wykazuje się explicite oryginalnego sformułowania twierdzenia, lecz sformułowanie w terminach K – teorii, tj. istnienie izomorfizmu

$$K(X) \otimes K(S^2) \xrightarrow{\simeq} K(X \times S^2)$$

dla zwartych przestrzeni topologicznych X albo dowodzi się pewien warunek, który implikuje periodyczność funktora K lub periodyczność odpowiednich grup homotopii.

Jednym z tych dowodów jest dowód przeprowadzony przez M. F. Atiyah [1], używający aparatu teorii operatorów eliptycznych. Innym jest czysto topologiczny dowód A. Kono i K. Tokunagi [9], w którym autorzy wykazują istnienie homotopijnej równoważności $BU \simeq \Omega^2 BSU$. E. Dyer w [3,II.A] konstuuje odwzorowanie $BU \to \Omega SU$, a następnie wykazuje, że jest to homotopijną równoważność. Natomiast B. Harris [8] i Ch. H. Giffen [7] w swoich dowodach wykorzystują aparat realizacji geometrycznych małych kategorii (a B. Harris ponadto Twierdzenia o Uzupełnianiu Grupowym) do wykazania homotopijnej równoważności $\Omega U \simeq \mathbb{Z} \times BU$.

Poniższa praca zawiera dowód twierdzenia Botta o periodyczności na podstawie dowodu Bruno Harrisa (por. Załącznik). Uzupełniamy pracę B. Harrisa o liczne szczegóły, które nie zostały zamieszczone w [8]. Ponadto wprowadzamy pojęcie częściowego monoidu w kategorii małych kategorii topologicznych *CatTop* (a w szczególności w kategorii zbiorów *Set* oraz w kategorii przestrzeni topologicznych *Top*) oraz formułujemy dowód w tych terminach, co czyni go bardziej klarownym i konsekwentnym niż opis B. Harrisa.

W rozdziale 2. (Wiadomości wstępne) zapoznajemy się z kilkoma podstawowymi definicjami oraz faktami, z których będziemy korzystać w trakcie dowodu. W szczególności definiujemy główne pojęcie tej pracy, tj. częściowy monoid w kategorii małych kategorii topologicznych i jego przestrzeń klasyfikująca.

W kolejnych rozdziałach przedstawiamy podzielony na trzy kroki dowód twierdzenia Botta o periodyczności, tj. wykazujemy istnienie homotopijnej równoważności

$$\Omega U \simeq \mathbb{Z} \times BU.$$

W rozdziale 3. (Krok 1.) korzystając z twierdzenia o diagonalizacji macierzy unitarnych wykazujemy homeomorfizm między grupą U oraz przestrzenią klasyfikującą częściowego monoidu topologicznego $\mathcal{G}$ (rozmaitość Grassmanna), tj. $\boldsymbol{B}\mathcal{G} \approx U$.

W rozdziale 4. (Krok 2.) pokazujemy, że zarówno $\mathcal{G}$ jak i $\coprod \mathcal{U}(n)$, gdzie $\mathcal{U}(n)$ oznacza kategorię wyznaczoną przez n – wymiarową grupę unitarną U_n, są częściowymi monoidami w kategorii *CatTop* kategorii topologicznych, a ponadto ich przestrzenie klasyfikujące są homotopijnie równoważne, tj $\boldsymbol{B}\mathcal{G} \simeq \boldsymbol{B}(\coprod \mathcal{U}(n)) = B(\coprod BU_n)$.

W rozdziale 5. (Krok 3.) korzystamy z Twierdzenia o Uzupełnianiu Grupowym i dostajemy homotopijną równoważność $\Omega B(\coprod BU_n) \simeq \mathbb{Z} \times BU$.

Wreszcie w rozdziale 6. przedstawiamy krótko pracę Ch. H. Giffena [7], w której jako punkt wyjścia przyjmuje on pomysł B. Harrisa, a następnie, dodając własne idee (w szczególności unikając korzystania z Twierdzenia o Uzupełnianiu Grupowym), rozwija go i uogólnia, otrzymując przejrzysty i uporządkowany dowód twierdzenia Botta o periodyczności zarówno w przypadku zespolonym jak i rzeczywistym.

Załącznik zawiera oryginalną pracę Bruno Harrisa "Bott periodicity via simplicial spaces".

2 Wiadomości wstępne

2.1 Kategorie topologiczne

Niech $\mathcal{C}$ będzie małą kategorią, a Mor $\mathcal{C}$ zbiorem jej morfizmów. Obiekty kategorii $\mathcal{C}$ zanurzamy w Mor $\mathcal{C}$ jako identyczności.

Definicja 2.1.1
$\mathcal{C}$ nazywamy kategorią topologiczną, jeśli w zbiorze morfizmów

$$\mathrm{Mor}\,\mathcal{C} = \coprod_{a,b \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}} \mathrm{Mor}\,_{\mathcal{C}}(a,b)$$

jest określona topologia taka, że:

- włożenie ob $\mathcal{C} \hookrightarrow$ Mor $\mathcal{C}$ jest domknięte,
- odwzorowania s, t : Mor $\mathcal{C} \to$ ob $\mathcal{C}$ zdefiniowane jako rzutowania $s(a \to b) = a, \quad t(a \to b) = b$ są ciągłe,
- składanie określone na podzbiorze Mor $\mathcal{C} \times$ Mor $\mathcal{C} \supset \{(\phi, \psi) : t(\phi) = s(\psi)\} \to$ Mor $\mathcal{C}$ jest ciągłe.

Przykłady 2.1.2

- Niech G będzie monoidem topologicznym działającym na przestrzeni X. Definiujemy kategorię X_G następująco:
  ob X_G = punkty X,
  Mor $(x_1, x_2) = \{g : \quad gx_1 = x_2\}$.
  Wówczas Mor $X_G = X \times G$ i odwzorowania s, t są zdefiniowane następująco:
  $s(x, g) = x, \quad t(x, g) = gx$.
- Szczególnym przypadkiem powyższego przykładu jest sytuacja, gdy $G = X$ i G działa na sobie przez przesunięcia. Wówczas oznaczamy $G_G = \mathcal{G}$ i kategoria $\mathcal{G}$ ma postać
  ob $\mathcal{G} = G$,
  Mor $(g_1, g_2) = h$, o ile $hg_1 = g_2$.
  Wtedy Mor $\mathcal{G} = G \times G$.

2.2 Funktory ciągłe i ciągłe transformacje naturalne

Definicja 2.2.1
Funktorem ciągłym między małymi kategoriami topologicznymi $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ nazwiemy funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ taki, że odwzorowanie F : Mor $\mathcal{C} \to$ Mor $\mathcal{D}$ jest

ciągłe.

Uwaga 2.2.2
Kategorię małych kategorii topologicznych z morfizmami, które są ciągłymi funktorami będziemy oznaczać $CatTop$.
Istnieją zanurzenia $Set \subset Top \subset CatTop$ opisane następująco: każdy zbiór $S \in \text{ob } Set$ utożsamiamy z obiektem kategorii Top zadając w nim topologię dyskretną. Natomiast przestrzeń topologiczną $Y \in \text{ob } Top$ utożsamiamy z kategorią $\mathcal{Y} \in \text{ob } CatTop$ taką, że obiektami $\mathcal{Y}$ są punkty Y, a jedynymi morfizmami są identyczności, a więc $\text{Mor } \mathcal{Y} = Y$.

Definicja 2.2.3
Niech $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą ciągłymi funktorami. $\Phi : F_1 \to F_2$ nazwiemy ciągłą transformacją naturalną funktorów F_1 i F_2, jeśli odwzorowanie

$$\text{ob } \mathcal{C} \ni c \longmapsto \big(\Phi(c) : F_1(c) \longrightarrow F_2(c)\big) \in \text{Mor } \mathcal{D}$$

jest ciągłe i dla każdego $\alpha : c \to c' \in \text{Mor } \mathcal{C}$ przemienny jest diagram

$$\begin{tikzcd}
F_1(c) \arrow[r, "\Phi(c)"] \arrow[d, "F_1(\alpha)"'] & F_2(c) \arrow[d, "F_2(\alpha)"] \\
F_1(c') \arrow[r, "\Phi(c')"'] & F_2(c')
\end{tikzcd}$$

2.3 Obiekty symplicjalne i ich realizacje geometryczne

Niech Δ będzie kategorią taką, że:

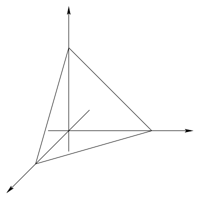
$$\text{ob } \Delta = \big\{[k] = \{0, 1, 2, \ldots, k\}\big\},$$
$$\text{Mor }_{\Delta}([k], [l]) = \{f : [k] \to [l] \text{ odwzorowania zachowujące porządek}\}.$$

Można pokazać ([5,II.2]), że każde takie odwzorowanie jest złożeniem pewnej liczby odwzorowań ścian i degeneracji zdefiniowanych następująco:

- $\delta_i : [n-1] \to [n], \quad i = 0, \ldots, n$ – włożenie opuszczające i – ty element (ściany),
- $\sigma_i : [n] \to [n-1], \quad i = 0, \ldots, n-1$ – sklejenia i-tego i $(i+1)$ – szego elementu (degeneracje).

Standardowym sympleksem topologicznym nazywamy zbiór

$$\triangle^n_{\mathrm{st}} = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \quad \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \;\text{ oraz } \forall\, i \quad 0 \leq t_i \leq 1\}.$$



Rysunek 1: $\triangle^2_{\mathrm{st}}$

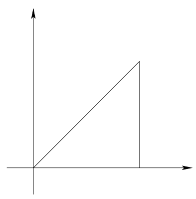
Wierzchołkami tego sympleksu są punkty:

$$\begin{array}{rcl} W_0 & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ W_1 & = & (0, 1, 0, \ldots, 0) \\ & \vdots & \\ W_n & = & (0, \ldots, 0, 1) \end{array}$$

Równoważnie możemy zdefiniować sympleks topologiczny jako zbiór

$$\triangle^n_{\mathrm{alt}} = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \geq 0\}$$

(ta interpretacja będzie przydatna w kroku 1. dowodu twierdzenia Botta).



Rysunek 2: $\triangle^2_{\mathrm{alt}}$

Wówczas wierzchołkami sympleksu są punkty:

$$\begin{array}{rcl} W_0 & = & (0, \ldots, 0) \\ W_1 & = & (1, 0, \ldots, 0) \\ W_2 & = & (1, 1, 0, \ldots, 0) \\ & \vdots & \\ W_n & = & (1, \ldots, 1) \end{array}$$

W wyniku obu definicji otrzymujemy zbiory homeomorficzne, przy czym homeomorfizm między standardowym sympleksem topologicznym $\triangle^n_{\mathrm{st}}$ a sympleksem topologicznym $\triangle^n_{\mathrm{alt}}$ zadany jest wzorem:

$$h : \triangle^n_{\mathrm{st}} \longrightarrow \triangle^n_{\mathrm{alt}}$$
$$h(t_0, \dots, t_n) = (t_1 + \ldots + t_n, t_2 + \ldots + t_n, \dots, t_{n-1} + t_n, t_n)$$

Istnieje funktor kowariantny $\triangle : \Delta \to \mathit{Top}$ taki, że $\triangle([n])$ jest standardowym sympleksem topologicznym $\triangle^n$, a $f : [n] \to [k]$ indukuje przekształcenie liniowe $f_* : \triangle^n \to \triangle^k$. Ponieważ $f : [n] \to [k]$ jest złożeniem pewnych odwzorowań ścian i degeneracji, to $f_* : \triangle^n \to \triangle^k$ jest złożeniem odwzorowań indukowanych przez ściany i degeneracje. Wobec tego aby wiedzieć jak działa f_* wystarczy wiedzieć, jak działają odwzorowania $(\delta_i)_*$ oraz $(\sigma_i)_*$, co pokażemy poniżej.

Otóż odwzorowania indukowane prez $\delta_i : [n-1] \to [n]$ oraz $\sigma_i : [n] \to [n-1]$ na $\triangle^{n-1}$ oraz $\triangle^n$ (odpowiednio) są wyznaczone jednoznacznie przez swoje wartości na wierzchołkach i wyglądają następująco (zarówno w przypadku sympleksu $\triangle^n_{\mathrm{st}}$, jak i sympleksu $\triangle^n_{\mathrm{alt}}$):

$$\begin{array}{lcllcl}
(\delta_i)_*(W_0) & = & W_0, & (\sigma_i)_*(W_0) & = & W_0, \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
(\delta_i)_*(W_{i-1}) & = & W_{i-1}, & (\sigma_i)_*(W_i) & = & W_i, \\
(\delta_i)_*(W_i) & = & W_{i+1}, & (\sigma_i)_*(W_{i+1}) & = & W_i, \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
(\delta_i)_*(W_{n-1}) & = & W_n, & (\sigma_i)_*(W_n) & = & W_{n-1}.
\end{array}$$

Definicja 2.3.1
Obiektem symplicjalnym w kategorii $\mathcal{C}$ nazywamy funktor z Δ^{op} do $\mathcal{C}$.

W szczególności biorąc $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathit{Set}$ otrzymujemy zbiór symplicjalny, a biorąc $\Delta^{\mathrm{op}} \to \mathit{Top}$ – przestrzeń symplicjalną.

Zauważmy, że obiekt symplicjalny $X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathit{Top}$ możemy interpretować jako ciąg $X.$ zbiorów (przestrzeni topologicznych) $X_n = X([n])$ taki, że pomiędzy kolejnymi zbiorami (przestrzeniami topologicznymi) X_{k-1} i X_k mamy odwzorowania indukowane przez przekształcenia ścian i degeneracji.

Definicja 2.3.2
Realizacją geometryczną obiektu symplicjalnego $X.$ nazwiemy przestrzeń topologiczną

$$|X.| = \coprod_{k=0}^{\infty} (X_k \times \triangle^k) / \sim,$$

gdzie $\sim$ jest najmniejszą relacją równoważości zawierającą utożsamienia:

$$(x, f_*(p)) \sim (f^*(x), p),$$

dla $f : [m] \to [n], \quad x \in X_n, \quad p \in \triangle^m.$

Mała efektywność powyższej relacji równoważności sprawia, że trudno od razu zorientować się, jak wyglądają poszczególne klasy równoważności tej relacji (tj. jak wygląda $|X.|$). Pomocą okazuje się być poniższe twierdzenie, które mówi, że każda klasa abstrakcji owej relacji jest jednoznacznie wyznaczona przez pewien punkt (x, p) szczególnej postaci należący do tej klasy, mianowicie x jest sympleksem niezdegenerowanym w X_n, a p leży we wnętrzu sympleksu $\triangle^n$.

Definicja 2.3.3
Sympleks $x \in X_n$ nazywamy zdegenerowanym, jeśli istnieje surjekcja $\sigma : [n] \to [n-1]$ i $y \in X_{n-1}$ taki, że $x = \sigma^*(y)$.
Sympleks $x \in X_n$ nazywamy niezdegenerowanym, jeśli x nie jest zdegenerowany.

Podzbiór X_n składający się z sympleksów niezdegenerowanych będziemy oznaczać przez

$$X_n^{\mathrm{nz}} = \{x \in X_n : \ x \text{ jest niezdegenerowany}\}.$$

Twierdzenie 2.3.4 [6,I.2]
Istnieje kanoniczna bijekcja

$$\coprod_{n \geq 0} X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \xrightarrow{\simeq} |X.|,$$

gdzie $\mathrm{int}\triangle^n$ oznacza wnętrze sympleksu topologicznego $\triangle^n$.

2.4 Gruba realizacja geometryczna przestrzeni symplicjalnej

Niestety, jak zauważył G. Segal w [11], zdefiniowana powyżej realizacja geometryczna przestrzeni symplicjalnej nie ma odpowiednio dobrych własności, które będą nam przydatne. Nie jest mianowicie prawdą, że odwzorowanie przestrzeni symplicjalnych $X. \to Y.$ takie, że $\forall\ n\ X_n \to Y_n$ jest homotopijną równoważnością indukuje homotopijną równoważność $|X.| \xrightarrow{\simeq} |Y.|$. Żeby poprawić sytuację, w ślad za [11], wprowadzimy pojęcie grubej realizacji geometrycznej przestrzeni symplicjalnej.

Zauważmy, że dowolny morfizm $f : [m] \to [n]$ w kategorii Δ możemy kanonicznie rozłożyć jako $[m] \xrightarrow{\phi} [r] \xrightarrow{\psi} [n]$, gdzie ϕ jest surjekcją, a ψ injekcją. Wówczas przekształcenie ilorazowe $\coprod X_k \times \triangle^k \to |X.|$ rozkłada się następująco:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{k=0}^{\infty} X_k \times \triangle^k \arrow[r, "\Phi"] \arrow[dr] & ||X.|| \arrow[d, "\Psi"] \\
 & |X.|
\end{tikzcd}$$

gdzie odwzorowanie Φ polega na sklejaniu ze sobą przestrzeni $X_k \times \triangle^k$, używając najmniejszej relacji równoważności zawierającej utożsamienia $(x, f_*(p)) \sim (f^*(x), p)$ dla wszystkich f injektywnych, a odwzorowanie Ψ na zgniataniu części zdegenerowanych, używając wszystkich f surjektywnych.

Definicja 2.4.1
Przestrzeń topologiczną powstałą po wykonaniu pierwszego kroku nazwiemy grubą realizacją geometryczną przestrzeni symplicjalnej $X.$ i będziemy oznaczać przez $||X.||$.

Zauważmy, że dla każdego i odwzorowanie $\sigma_i : [n] \to [n-1]$ jest surjekcją. Zatem istnieje zachowujący porządek przekrój $s : [n-1] \to [n]$ taki, że $\sigma_i \circ s = \mathrm{id}_{[n-1]}$. Wobec tego odwzorowania indukowane przez σ_i oraz s spełniają $s^* \circ \sigma_i^* = \mathrm{id}_{A_{n-1}}$, czyli σ_i^* ma lewostronną odwrotność, a zatem jest injekcją.

Definicja 2.4.2
Przestrzeń symplicjalną $A.$ nazwiemy "dobrą", jeżeli dla każdego n oraz i włożenie $(\sigma_i)^* : A_{n-1} \longrightarrow A_n$ jest domkniętym korozwłóknieniem.

Stwierdzenie 2.4.3 [12]
Funktor grubej realizacji geometrycznej posiada następujące własności:

- Dla "dobrych" przestrzeni symplicjalnych $A.$ odwzorowanie $||A.|| \xrightarrow{\Psi}$

$|A.|$ (zgniatanie części zdegenerowanych), jest homotopijną równoważnością.

- Odwzorowanie przestrzeni symplicjalnych $A. \to B.$ takie, że $\forall\, n \quad A_n \to B_n$ jest homotopijną równoważnością, indukuje homotopijną równoważność $||A.|| \to ||B.||$.

Uwaga 2.4.4
Wszystkie przestrzenie symplicjalne pojawiające się w naszej pracy będą "dobre" (por. 4.1), zatem od tej pory będziemy zakładać, że zwykłe realizacje geometryczne będą posiadać własności wymienione w stwierdzeniu 2.4.3.

2.5 Realizacja geometryczna kategorii topologicznej

Niech $\mathcal{C}$ będzie kategorią topologiczną.
Niech $[n]$ będzie kategorią taką, że ob $[n] = \{0, 1, \ldots, n\}$ i istnieje dokładnie jeden morfizm $l \to k$, o ile $l \leq k$.

Definicja 2.5.1
Realizację geometryczną kategorii $\mathcal{C}$ oznaczamy przez $B\mathcal{C}$ i definiujemy jako realizację geometryczną przestrzeni symplicjalnej $N\mathcal{C}$ zwanej nerwem kategorii $\mathcal{C}$, a określanej następująco:
$(N\mathcal{C})_n = \mathrm{Hom}\,([n], \mathcal{C})$ – funktory kowariantne $[n] \to \mathcal{C}$,
równoważnie:
$(N\mathcal{C})_n = \{c_0 \to c_1 \to \cdots \to c_n :\ c_i \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C},$ odwzorowania są morfizmami w $\mathcal{C}\}$
z topologią podzbioru $(\mathrm{Mor}\,\mathcal{C})^n$.

Odwzorowania zachowujące porządek $f : [n] \to [m]$ są funktorami, a więc indukują odwzorowania $f^* : \mathrm{Hom}\,([m], \mathcal{C}) \to \mathrm{Hom}\,([n], \mathcal{C})$.
W szczególności odwzorowania indukowane przez ściany i degeneracje wyglądają następująco:

- $\delta_i^* : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n-1}$:

$$(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n) \longmapsto (c_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} c_i \xrightarrow{f_{i+2} \circ f_{i+1}} c_{i+2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n),$$
$$(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n) \longmapsto (c_1 \xrightarrow{f_2} c_2 \xrightarrow{f_3} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n),$$
$$(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n) \longmapsto (c_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{n-2}} c_{n-2} \xrightarrow{f_{n-1}} c_{n-1}),$$

- $\sigma_i^* : N\mathcal{C}_{n-1} \to N\mathcal{C}_n$:

$$(c_0 \xrightarrow{f_1} c_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} c_n) \longmapsto (c_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} c_i \xrightarrow{\mathrm{id}} c_i \xrightarrow{f_{i+1}} c_{i+1} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} c_{n-1})$$

Przykład 2.5.2
Realizację geometryczną monoidu topologicznego M (tj. monoidu w kategorii Top) definiujemy jako realizację geometryczną kategorii $\mathcal{M}$ z jednym obiektem i morfizmami będącymi elementami M.
Wówczas BM jest realizacją geometryczną przestrzeni symplicjalnej $(N\mathcal{M})_n = \{\mathrm{pt} \xrightarrow{m_1} \mathrm{pt} \xrightarrow{m_2} \dots \xrightarrow{m_n} \mathrm{pt} : \ m_i \in M\} = M^n$.

Przykład 2.5.3
Niech G będzie grupą działającą wolno na X. Niech X_G będzie kategorią topologiczną z przykładu 2.1.2. Wówczas

$$BX_G = EG \times_G X.$$

Dowód
EG z definicji jest realizacją geometryczną kategorii $\mathcal{G}$ z przykładu 2.1.2, czyli $EG = |N\mathcal{G}|$.
Zauważmy, że

$$(NX)_n = X,$$
$$(NX_G)_n = \{x_0 \xrightarrow{h_1} x_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_n} x_n\} = \{x_0; h_1, \dots, h_n : \ x_0 \in X, h_i \in G\},$$
$$(N\mathcal{G})_n = \{g_0 \xrightarrow{h_1} g_1 \xrightarrow{h_2} \cdots \xrightarrow{h_n} g_n\} = \{g_0; h_1, \dots, h_n : \ g_0, h_i \in G\}.$$

Ponadto zauważmy, że $(N\mathcal{G})_n$ jest prawą G – przestrzenią, a X jest lewą G – przestrzenią z działaniami:
$g(g_0; h_1, \dots, h_n) = (g_0 \cdot g; h_1, \dots, h_n), \quad g(x) = g \cdot x$
dla $g \in G, \ (g_0; h_1, \dots, h_n) \in (N\mathcal{G})_n, \ x \in X$.

Określamy odwzorowanie $\phi_n : (N\mathcal{G})_n \times X \longrightarrow (NX_G)_n$ następującym wzorem

$$\phi_n\big((g_0; h_1, \dots, h_n), x_0\big) = (g_0 x_0; h_1, \dots, h_n).$$

ϕ_n jest dobrze określonym przekształceniem przestrzeni symplicjalnych, gdyż łatwo sprawdzić, że jest przemienne z odwzorowaniami ścian i degeneracji.

ϕ_n jest oczywiście surjekcją, bo

$$(x_0; h_1, \dots, h_n) = \phi_n\big((e; h_1, \dots, h_n), x_0\big).$$

Ponadto jeśli

$$\phi_n\big((g_0; h_1, \dots, h_n), x_0\big) = \phi_n\big((g_1; k_1, \dots, k_n), x_1\big),$$

to $\forall\ i\ h_i = k_i$ oraz $g_0 x_0 = g_1 x_1$. Stąd dwa punkty w $(N\mathcal{G})_n \times X$ mają ten sam obraz wtedy i tylko wtedy, gdy są one postaci

$$\big((g_1 \cdot (g_1^{-1} g_0); h_1, \ldots, h_n), x_0\big) \text{ oraz } \big((g_1; h_1, \ldots, h_n), (g_1^{-1} g_0) \cdot x_0\big).$$

Wobec tego ϕ_n indukuje izomorfizm przestrzeni symplicjalnych

$$\phi_n : (N\mathcal{G})_n \times_G X \longrightarrow (NX_G)_n.$$

Po przejściu do realizacji geometrycznych otrzymujemy równość

$$EG \times_G X = BX_G. \qquad \blacksquare$$

Uwaga 2.5.4
Niech X_G będzie kategorią z powyższego przykładu. Niech G będzie kategorią z jednym obiektem i morfizmami wyznaczonymi przez grupę G, a X/G będzie kategorią odpowiadającą przestrzeni topologicznej X/G. Wówczas kanoniczne rzutowania

$$G \longleftarrow X_G \longrightarrow X/G$$

indukują odwzorowania

$$BG \longleftarrow EG \times_G X \longrightarrow X/G. \qquad \blacksquare$$

Konstrukcja przestrzeni klasyfikującej kategorii topologicznej ma następujące ważne własności:

Stwierdzenie 2.5.5 [11] [12]
Projekcje $\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \longrightarrow \mathcal{C}_i,\ i = 1, 2$ zadają homeomorfizm

$$B(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \approx B\mathcal{C}_1 \times B\mathcal{C}_2,$$

gdzie w $B\mathcal{C}_1 \times B\mathcal{C}_2$ wprowadzamy topologię k – przestrzeni.
Ponadto włożenia $\mathcal{C}_i \hookrightarrow \mathcal{C}_1 \coprod \mathcal{C}_2,\ i = 1, 2$ indukują homeomorfizm

$$B\mathcal{C}_1 \coprod B\mathcal{C}_2 \approx B(\mathcal{C}_1 \coprod \mathcal{C}_2).$$

Stwierdzenie 2.5.6 [11]
Jeżeli $\mathcal{C}$ i $\mathcal{C}'$ są kategoriami topologicznymi, $F_1, F_2 : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ciągłymi funktorami, a $F : F_1 \to F_2$ ciągłą transformacją naturalną funktorów, to $BF_1 : B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}'$i $BF_2 : B\mathcal{C} \to B\mathcal{C}'$ są homotopijne.

2.6 Włókno funktora

Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ będzie ciągłym funktorem między kategoriami topologicznymi oraz $b \in \mathrm{ob}\,\mathcal{B}$.
Włókno funktora F nad b (oznaczamy F/b) jest kategorią topologiczną zdefiniowaną następująco:

$$\mathrm{ob}\,(F/b) = \{(a, F(a) \to b)\},$$

$$\mathrm{Mor}_{\,F/b}\big((a, F(a) \to b), (a', F(a') \to b)\big) = \left\{ \begin{array}{ccc} a \xrightarrow{\alpha} a' : & \begin{tikzcd} F(a) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d] & F(a') \arrow[dl] \\ b & \end{tikzcd} \end{array} \right\}.$$

Topologia w zbiorze $\mathrm{Mor}\,F/b$ jest topologią podzbioru $\mathrm{Mor}\,\mathcal{A} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{B} \times \mathrm{Mor}\,\mathcal{B}$.

2.7 Częściowy monoid w kategorii *CatTop* i jego przestrzeń klasyfikująca

Definicja 2.7.1
Częściowym monoidem w kategorii *CatTop* nazwiemy topologiczną kategorię symplicjalną $\mathcal{M}. = \big(\mathcal{M}^{(k)}\big)_{k \geq 0}$ taką, że

- $\mathcal{M}^{(0)} = \mathrm{pt} \overset{\mathrm{ozn}}{=} e$,
- $\mathcal{M}^{(1)} = \mathcal{M} \in \mathrm{ob}\ CatTop$ jest kategorią topologiczną,
- $\mathcal{M}^{(k)} \subset \mathcal{M} \times \ldots \times \mathcal{M} = \mathcal{M}^k$ dla $k \geq 2$ jest podkategorią $\mathcal{M}^k$ taką, że jest na niej określony funktor mnożenia $\mu_k : \mathcal{M}^{(k)} \to \mathcal{M}$ dla którego przemienne są diagramy:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{(k+1)} \arrow[r, "\mu_{k+1}"] \arrow[d, "(\delta_i)^*"'] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^{(k)} \arrow[ur, "\mu_k"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{M}^{(k+1)} \arrow[r, "\mu_{k+1}"] & \mathcal{M} \\ \mathcal{M}^{(k)} \arrow[u, "(\sigma_i)^*"] \arrow[ur, "\mu_k"'] & \end{tikzcd}$$

gdzie odwzorowania ścian i degeneracji mają postać

- $(\delta_i)^* : \mathcal{M}^{(k)} \to \mathcal{M}^{(k-1)}$

  $(m_1, \ldots, m_k) \longmapsto (m_1, \ldots, \mu_2(m_i, m_{i+1}), \ldots, m_k)$ dla $i = 1, \ldots, k-1$,
  $(m_1, \ldots, m_k) \longmapsto (m_2, \ldots, m_k)$,
  $(m_1, \ldots, m_k) \longmapsto (m_1, \ldots, m_{k-1})$,

- $(\sigma_i)^* : \mathcal{M}^{(k-1)} \to \mathcal{M}^{(k)}$

  $(m_1, \ldots, m_{k-1}) \longmapsto (m_1, \ldots, m_i, e, , m_{i+1}, \ldots, m_{k-1})$ dla $i = 1, \ldots, k$.

DEFINICJA 2.7.2
Morfizmem częściowych monoidów $(\mathcal{M}, \mu_{\mathcal{M}})$ i $(\mathcal{M}', \mu_{\mathcal{M}'})$ w kategorii *Cat-Top* nazwiemy funktor $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ zachowujący jedność i taki, że
$\forall\ (m_1, m_2) \in \mathcal{M}^{(2)}$ zachodzi $(f(m_1), f(m_2)) \in \mathcal{M}'^{(2)}$ oraz
$f(\mu_{\mathcal{M}}(m_1, m_2)) = \mu_{\mathcal{M}'}(f(m_1), f(m_2))$.

DEFINICJA 2.7.3
Przestrzeń klasyfikującą częściowego monoidu $\mathcal{M}$ w kategorii *CatTop* będziemy oznaczać przez $\boldsymbol{B}\mathcal{M}$, a definiujemy ją jako realizację geometryczną przestrzeni symplicjalnej $X.$, gdzie $X_k = B\mathcal{M}^{(k)}$ dla $k \geq 0$, a odwzorowania $X_n \to X_{n_1}$ i $X_{n-1} \to X_n$ są postaci $B(\delta_i)^*$ i $B(\sigma_i)^*$.

UWAGA 2.7.4
Zgodnie z uwagą 2.2.2 istnieją zanurzenia *Set* $\subset$ *Top* $\subset$ *CatTop* . Wobec tego w szczególności dla $\mathcal{M} \in$ ob *CatTop* otrzymujemy pojęcia:

- częściowego monoidu topologicznego, jeśli $\mathcal{M} \in$ ob *Top*,
- częściowego monoidu, jeśli $\mathcal{M} \in$ ob *Set*,
- przestrzeni klasyfikującej częściowego monoidu topologicznego,
- przestrzeni klasyfikującej częściowego monoidu.

Ponadto jeśli $\mathcal{M} \in$ ob *CatTop* jest monoidem, tj. $\mathcal{M}^{(k)} = \mathcal{M}^k$ dla $k \geq 2$, to otrzymujemy znane pojęcia:

- monoidu topologicznego, jeśli $\mathcal{M} \in$ ob *Top*,
- monoidu, jeśli $\mathcal{M} \in$ ob *Set*,
- przestrzeni klasyfikującej monoidu topologicznego,
- przestrzeni klasyfikującej monoidu.

Uwaga 2.7.5
Jeżeli $\mathcal{M}$ jest monoidem w *CatTop* , to przestrzeń klasyfikująca $B\mathcal{M}$ jest monoidem topologicznym oraz $\boldsymbol{B}\mathcal{M} = B(B\mathcal{M})$.

Dowód
$\mathcal{M}$ jest monoidem w *CatTop* , zatem $\mathcal{M}^{(k)} = \mathcal{M}^k$. Ponadto $B\mathcal{M}$ jest monoidem topologicznym, gdyż mnożenie $\mathcal{M} \times \mathcal{M} \xrightarrow{\mu} \mathcal{M}$ indukuje (zgodnie ze stwierdzeniem 2.5.3) mnożenie $B\mathcal{M} \times B\mathcal{M} \approx B(\mathcal{M} \times \mathcal{M}) \xrightarrow{B\mu} B\mathcal{M}$.
$\boldsymbol{B}\mathcal{M}$ otrzymujemy jako realizację geometryczną przestrzeni symplicjalnej

$$B\mathcal{M}^{(k)} = B\mathcal{M}^k = (B\mathcal{M})^k \text{ dla } k \geq 0.$$

Zatem korzystając z przykładu 2.5.2 zachodzi $\boldsymbol{B}\mathcal{M} = B(B\mathcal{M})$. ■

Przykład 2.7.6
Niech $\mathcal{G}$ oznacza rozmaitość Grassmanna, traktowaną jako kategoria topologiczna zgodnie z uwagą 2.2.2.

Zauważmy, że $\mathcal{G}$ jest częściowym monoidem topologicznym. Podkategorie $\mathcal{G}^{(k)}$ dla $k \geq 2$ mają postać

$$\mathcal{G}^{(k)} = \{(E_1, \ldots, E_k) \in \mathcal{G}^k : \ E_i \perp E_j \text{ dla } i \neq j\},$$

a mnożenie

$$\mathcal{G}^{(k)} \ni (E_1, \ldots, E_k) \xmapsto{\mu_k} E_1 + \ldots + E_k \in \mathcal{G}.$$

Zatem przestrzeń klasyfikującą $\mathcal{G}$, czyli $\boldsymbol{B}\mathcal{G}$, otrzymamy biorąc realizację geometryczną przestrzeni symplicjalnej $X.$ określonej następująco:
$X_0 = Bpt = pt$,
$X_k = B\mathcal{G}^{(k)} = \mathcal{G}^{(k)}$ dla $k \geq 2$.

Odwzorowania ścian i degeneracji mają wówczas postać:

- ściany $X_n \to X_{n+1}$ mają postać:
  $[E_1, \ldots, E_n] \longmapsto [E_1, \ldots, E_{i-1}, 0, E_i, \ldots, E_n], \quad 1 \leq i \leq n+1,$
- degeneracje $X_n \to X_{n-1}$ mają postać:
  $[E_1, \ldots, E_n] \longmapsto [E_1, \ldots, E_i + E_{i+1}, \ldots, E_n], \quad 1 \leq i \leq n-1,$
  $[E_1, \ldots, E_n] \longmapsto [E_2, \ldots, E_n],$
  $[E_1, \ldots, E_n] \longmapsto [E_1, \ldots, E_{n-1}].$

Z definicji $|X.| = \boldsymbol{B}\mathcal{G}$.

Przykład 2.7.7
Niech $\mathcal{P} \subset \operatorname{End}(\mathbb{C}^\infty)$ bedzie podzbiorem $\operatorname{End}(\mathbb{C}^\infty)$ opisanym następująco:

$$\mathcal{P} = \{E \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^\infty) : \ 0 \leq \dim \operatorname{im} E < \infty, \ E \text{ jest rzutem prostopadłym}\}.$$

Utożsamiamy $\mathcal{P}$ z obiektem kategorii $CatTop$ zgodnie z uwagą 2.2.2.

Zauważmy, że $\mathcal{P}$ jest częściowym monoidem topologicznym, jeśli dla $k \geq 2$ zdefiniujemy

$$\mathcal{P}^{(k)} = \{(E_1, \ldots, E_k) \in \mathcal{P}^k : \ E_i E_j = 0 \text{ dla } i \neq j\}.$$

Mnożenie $\mu_k : \mathcal{P}^{(k)} \to \mathcal{P}$ jest zadane następująco:

$$\mathcal{P}^{(k)} \ni (E_1, \ldots, E_k) \overset{\mu_k}{\longmapsto} E_1 + \ldots + E_k \in \mathcal{P}.$$

Uwaga 2.7.8
Istnieje izomorfizm częściowych monoidów topologicznych $\mathcal{G} \simeq \mathcal{P}$ zadany następująco: każdy element $E \in \mathcal{G}$, czyli podprzestrzeń skończonego wymiaru w $\mathbb{C}^\infty$, możemy utożsamiać z rzutowaniem prostopadłym $(E : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty)$ na tę podprzestrzeń.
Natomiast każdemu rzutowaniu będzie odpowiadać element $\mathcal{G}$ będący jego obrazem.
Zatem elementy Grassmannianu $\mathcal{G}$ możemy traktować jako rzutowania prostopadłe i jeśli
$E_i \perp E_j$ dla $E_i, E_j \in \mathcal{G}$, to $E_i E_j = 0$ dla $E_i, E_j \in \mathcal{P}$ oraz jeśli
$E = E_i + E_j$ dla $E_i, E_j \in \mathcal{G}$, to $E = E_i + E_j$ dla $E_i, E_j \in \mathcal{P}$.

3 Krok 1. $\boldsymbol{B}\mathcal{G} \approx U$

Przypomnijmy, że rozpatrujemy $\mathbb{C}^\infty$ z hermitowskim iloczynem skalarnym, a U oznacza grupę przekształceń unitarnych $\mathbb{C}^\infty$, które są identycznością na podprzestrzeni skończonego kowymiaru.

Uwaga 3.1
Łatwo pokazać, że równoważnie grupę unitarną U można zdefiniować jako granicę prostą $U = \lim U_n$ wstępującego ciągu n – wymiarowych grup unitarnych U_n, gdzie włożenie $U_n \hookrightarrow U_{n+1}$ jest zadane następująco

$$\mathcal{U}_n \ni A \longmapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U_{n+1}.$$

Twierdzenie 3.2 (O Diagonalizacji Macierzy Unitarnych) [10,2.7]
Jeśli $A \in U$ jest przekształceniem unitarnym, to istnieją podprzestrzenie $E_i \subset \mathbb{C}^\infty$ takie, że A ma postać

$$A = e^{2\pi i t_1} E_1 + \ldots + e^{2\pi i t_n} E_n + E_\infty,$$

gdzie $E_j : \mathbb{C}^\infty \to \mathbb{C}^\infty$ oznacza rzutowanie prostopadłe na skończenie wymiarową podprzestrzeń E_j, $e^{2\pi i t_j}$ jest wartością własną odpowiadającą tej podprzestrzeni, E_∞ jest rzutowaniem prostopadłym na podprzestrzeń $(+_{j=1}^n E_j)^\perp$ i ponadto $t_1 \geq \ldots \geq t_n$.

Uwaga 3.3
Wówczas macierz przekształcenia A w bazie:
baza E_1,...,baza E_n, baza $(+_{j=1}^n E_j)^\perp$
ma postać

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Id} \cdot e^{2\pi i t_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id} \cdot e^{2\pi i t_n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix}.$$

Stwierdzenie 3.4
Niech X będzie przestrzenią topologiczną z filtracją zbiorami zwartymi K, tj. $X = \lim_{K \subset X} K$, a Y przestrzenią z filtracją zbiorami zwartymi L, tj. $Y = \lim_{L \subset Y} L$. Załóżmy, że $f : X \to Y$ jest ciągłą bijekcją oraz $\forall\, L\ \exists\, K_L$ takie, że $X = \lim_{L \subset Y} K_L$ i $L \subset f(K_L)$. Wówczas f jest homeomorfizmem.

Dowód
Zauważmy, że skoro $K_L \subset X$ jest zbiorem zwartym, to $f(K_L) \subset Y$ jako obraz zbioru zwartego przy ciągłej surjekcji jest zbiorem domkniętym.
Z założenia mamy filtrację X zbiorami zwartymi $X = \lim_{L \subset Y} K_L$. Stąd, a także z faktu, że $L \subset f(K_L)$ wynika, iż mamy również filtrację Y zbiorami domkniętymi $Y = \lim_{L \subset Y} f(K_L)$.
Zauważmy, że $f|_{K_L} : K_L \to f(K_L)$ jest homeomorfizmem.
Istotnie, wystarczy pokazać, że f jest domknięte (co jest równoważne ciągłości f^{-1}).
Niech $A \subset K_L$ będzie zbiorem domkniętym. Ze zwartości K_L wynika, że A jest zbiorem zwartym. Stąd $f(A)$ jest zbiorem domkniętym (ponownie jako obraz zbioru zwartego przy ciągłej surjekcji), co dowodzi domkniętości f. Zatem f jest homeomorfizmem.

Przechodząc do granicy prostej po $L \subset Y$ otrzymujemy, że odwzorowanie

$$X = \lim_{L \subset Y} K_L \xrightarrow{f} \lim_{L \subset Y} f(K_L) = Y$$

jest homeomorfizmem. ■

TWIERDZENIE 3.5
$\boldsymbol{B}\mathcal{G}$ jest homeomorficzna z U.

DOWÓD
Z definicji $\boldsymbol{B}\mathcal{G} = |X.| = \coprod (X_n \times \triangle^n)/\sim$, gdzie relacja $\sim$ jest generowana przez $(x, f_*(p)) \sim (f^*(x), p)$ dla $f : [m] \to [n]$, $\quad p \in \triangle^m$, $\quad x \in X_n$, a $X.$ jest przestrzenią symplicjalną zdefiniowaną w przykładzie 2.7.6
Niech sympleksy $\triangle^n$ będą opisane układem nierówności:

$$\triangle^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n : \quad 1 \geq t_1 \geq t_2 \geq \ldots \geq t_n \geq 0\}.$$

Określamy $h : \coprod X_n \times \triangle^n \to U$ następująco:

$$h\big([E_1, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_n)\big) = e^{2\pi i t_1} E_1 + \ldots + e^{2\pi i t_n} E_n + E_\infty,$$

tj. $h\big([E_1, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_n)\big) \overset{\text{ozn}}{=} A$ jest przekształceniem o wartościach własnych $e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}$ i podprzestrzeniach własnych $E_1, \ldots, E_n$.

Oczywiście $A \in U$, bo $\overline{A}^T \cdot A = \mathrm{Id}$.
Zatem h istotnie ma wartości w U.
Ponadto h oczywiście jest ciągłe.
Wobec tego pozostaje do sprawdzenia, że h jest zgodne z relacją, różnowartościowe, na oraz że h^{-1} jest ciągłe.

- Zgodność z relacją wystarczy sprawdzić dla odwzorowań ścian i degeneracji.
  Ściana $f : [n] \to [n+1]$ indukuje utożsamienie

  $$\big([E_1, \ldots, E_{n+1}], (t_1, \ldots, t_i, t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n)\big) \sim$$
  $$\sim \big([E_1, \ldots, E_i + E_{i+1}, \ldots, E_{n+1}], (t_1, \ldots, t_n)\big).$$

  Degeneracja $f : [n+1] \to [n]$ indukuje utożsamienie

  $$\big([E_1, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_i, t_{i+2}, \ldots, t_{n+1})\big) \sim$$
  $$\sim \big([E_1, \ldots, E_i, 0, E_{i+1}, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_{n+1})\big).$$

  Łatwo sprawdzić, że punktom będącym w relacji odpowiadają te same macierze.

- Zgodnie z twierdzeniem 2.3.4 istnieje bijekcja

$$\coprod_{n\geq 0} X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \xrightarrow{\simeq} |X.|.$$

Zatem zamiast sprawdzać różnowartościowość przekształcenia $h : |X.| \to U$, starczy sprawdzić różnowartościowość $h : \coprod_{n\geq 0} X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \to U$.

Zauważmy, że dla $n > 0$

$$\mathrm{int}\triangle^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, 1 > t_1 > t_2 > \ldots > t_n > 0\}.$$

Przypuśćmy, że $h : \coprod_{n\geq 0} X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \to U$ przyjmuje tę samą wartość w punktach

$$\begin{array}{l} \big([E_1, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_n)\big) \in X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \text{ oraz} \\ \big([F_1, \ldots, F_m], (s_1, \ldots, s_m)\big) \in X_m^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^m, \end{array}$$

czyli zachodzi równość przekształceń unitarnych

$$h_{E,t} \overset{\mathrm{ozn}}{=} h\big([E_1, \ldots, E_n], (t_1, \ldots, t_n)\big) = h\big([F_1, \ldots, F_m], (s_1, \ldots, s_m)\big) \overset{\mathrm{ozn}}{=} h_{F,s}.$$

Skoro $t_1, \ldots, t_n \in \mathrm{int}\triangle^n$,to $t_1 > \ldots > t_n$, a w szczególności $t_i \neq t_j$ dla $i \neq j$. Podobnie otrzymujemy, że $s_i \neq s_j$ dla $i \neq j$.

Zatem $e^{2\pi i t_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n}$ są różnymi wartościami własnymi przekształcenia $h_{E,t}$, a $e^{2\pi i s_1}, \ldots, e^{2\pi i s_m}$ są różnymi wartościami własnymi przekształcenia $h_{F,s}$.

Z twierdzenia 3.2 wynika, że przekształcenie unitarne jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje różne wartości własne i odpowiadające im podprzestrzenie własne. W szczególności liczba różnych wartości własnych jest jednoznacznie określona.

Wobec tego $h_{E,t} = h_{F,s}$ ma $n = m$ różych wartości własnych i są to $e^{2\pi i t_1} = e^{2\pi i s_1}, \ldots, e^{2\pi i t_n} = e^{2\pi i s_m}$.

W szczególności z tego, że $1 > t_1 > \ldots > t_n > 0$ oraz $1 > s_1 > \ldots > s_m > 0$ wynika, że $t_i = s_i$ dla $i = 1, \ldots, n = m$.

Ponadto odpowiednie podprzestrzenie własne są sobie równe, czyli $E_i = F_i$ dla $i = 1, \dots, n = m$.

Zatem z tego, że

$$h\big([E_1, \dots, E_n], (t_1, \dots, t_n)\big) = h\big([F_1, \dots, F_m], (s_1, \dots, s_m)\big)$$

wynika, że

$$\big([E_1, \dots, E_n], (t_1, \dots, t_n)\big) = \big([F_1, \dots, F_m], (s_1, \dots, s_m)\big).$$

Wobec tego $h : \coprod_{n \geq 0} X_n^{\mathrm{nz}} \times \mathrm{int}\triangle^n \to U$ jest różnowartościowe, czyli $h : |X.| \to U$ również jest różnowartościowe.

- Zauważmy, że jeśli $A \in U$ jest przekształceniem unitarnym, to zgodnie z twierdzeniem 3.2 w pewnej bazie A ma postać

  $$A = e^{2\pi i t_1} E_1 + \dots + e^{2\pi i t_n} E_n + E_\infty,$$

  gdzie $1 \geq t_1 > \dots > t_n \geq 0$.
  Zatem
  $$A = h\big([E_1, \dots, E_n], (t_1, \dots, t_n)\big),$$

  co dowodzi surjektywności h.

- Zamiast dowodzić ciągłość h^{-1} skorzystamy ze stwierdzenia 3.4, by wykazać, że h jest homeomorfizmem.
  Niech
  $$X_k^m = \{(E_1, \dots, E_k) \in X_k : \ \forall\, i\ E_i \in \mathbb{C}^m\}$$

  oznacza skończenie wymiarową rozmaitośś Grassmanna. W szczególności X_k^m jest przestrzenią zwartą.

Zauważmy, że przemienny jest nieskończony diagram

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r, hook] & \coprod_{k\le n} X_k^{m+1}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \coprod_{k\le n+1} X_k^{m+1}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook] & \coprod_{k\le n} X_k^{m}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \coprod_{k\le n+1} X_k^{m}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, hook] & \coprod_{k\le n} X_k^{m-1}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \coprod_{k\le n+1} X_k^{m-1}\times\triangle^k \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u, hook] & \vdots \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

w którym poziome odwzorowania są naturalnymi zanurzeniami, a pionowe pochodzą od zanurzeń $E_i \mapsto E_i + \mathbb{C}$.

Powyższy diagram prowadzi do "przekątniowej" filtracji przestrzeni $\coprod_{k\ge 0} X_k \times \triangle^k$ zbiorami $\coprod_{k\le N} X_k^N \times \triangle^k$, tj.

$$\coprod_{k\ge 0} X^k \times \triangle^k = \lim_N \coprod_{k\le N} X_k^N \times \triangle^k.$$

Co więcej, jest to filtracja zbiorami zwartymi, bo X_k^N oraz $\triangle^k$ są zwarte, a skończona suma zbiorów zwartych jest zbiorem zwartym.

Przechodząc z $\coprod_{k\ge 0} X_k \times \triangle^k$ do realizacji geometrycznej, otrzymujemy filtrację zbiorami zwartymi przestrzeni $|X.|$.

Ponadto $U = \lim_N U_N$ także jest filtracją zbiorami zwartymi.

Zauważmy, że $h : |X.| \to U$ spełnia założenia stwierdzenia 3.4.
Istotnie, pokazaliśmy już, że h jest ciągłą bijekcją, a przestrzenie $|X.|$ oraz U mają filtracje zbiorami zwartymi.
Zauważmy, że

$$U_N = h\Big(\coprod_{k\le N} (X_k^N \times \triangle^k)/\sim\Big),$$

a ponadto

$$|X.| = \lim_N \coprod_{k \leq N} (X_k^N \times \triangle^k)/\sim .$$

Zatem ze stwierdzenia 3.4 wynika, że

$$h : |X.| \longrightarrow U$$

jest homeomorfizmem, co kończy dowód twierdzenia. ■

4 Krok 2. $B(\coprod BU_n) \simeq \boldsymbol{B\mathcal{G}}$

Niech $\mathcal{I}$ oznacza kategorię topologiczną, której obiektami są zespolone przestrzenie wektorowe $\mathbb{C}^n, \quad n = 0, 1, \ldots, \infty$, a morfizmami izometryczne włożenia.
Niech $\mathcal{U} \subset \mathcal{I}$ oznacza podkategorię, której obiektami są skończenie wymiarowe przestrzenie wektorowe $\mathbb{C}^n, \quad n = 0, 1, \ldots$, a morfizmami jedynie ich automorfizmy unitarne.
Zauważmy, że $\mathcal{U} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}(n)$, gdzie $\mathcal{U}(n)$ oznacza kategorię wyznaczoną przez n – wymiarową grupę unitarną U_n.
Ponadto $\mathcal{U} \in$ ob *CatTop* i ma strukturę monoidu w tej kategorii.
Istotnie, dla $k \geq 2$ podkategoria $\mathcal{U}^{(k)} = \mathcal{U} \times \ldots \times \mathcal{U} = \mathcal{U}^k$, a funktor $\mu : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ taki, że $\mu(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \mathbb{C}^{n+m}$ zadaje mnożenie na kategorii $\mathcal{U}$.

Niech $\mathcal{F} = \mathcal{U}/\mathbb{C}^\infty$ będzie włóknem włożenia $i : \mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{I}$ nad $\mathbb{C}^\infty$.
Kategoria $\mathcal{F}$ wygląda następująco:

$$\begin{aligned} \text{ob}\, \mathcal{F} &= \{\mathbb{C}^n, \quad i(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}^\infty\} \\ &= \{\theta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\infty : \quad \theta \quad \text{jest zanurzeniem izometrycznym}\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Mor}_{\mathcal{F}} &= \left\{ \begin{array}{ccccl} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{C}^\infty & : & \alpha \quad \text{jest automorfizmem unitarnym} \\ \alpha \downarrow & & \| & & \text{takim, że diagram jest przemienny} \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\theta'} & \mathbb{C}^\infty & & \end{array} \right\} \\ &= \{\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \quad \text{dokładnie jedna izometria, że } \theta' \circ \alpha = \theta\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{F} \in$ ob *CatTop* również jest częściowym monoidem w tej kategorii. Podkategorie $\mathcal{F}^{(k)}$ mają postać

$$\mathcal{F}^{(k)} = \{(\theta_1 : \mathbb{C}^{n_1} \to \mathbb{C}^\infty, \ldots, \theta_k : \mathbb{C}^{n_k} \to \mathbb{C}^\infty) \in \mathcal{F}^k : \quad \text{im}\, \theta_1 \perp \text{im}\, \theta_2 \text{ dla } i \neq j\}$$

a funktory mnożenia są określone następująco

$$\mathcal{F}^{(k)} \ni (\theta_1, \ldots, \theta_k) \xmapsto{\mu_k} (\theta_1 + \ldots + \theta_k : \mathbb{C}^{n_1+\ldots+n_k} \to \mathbb{C}^{\infty}) \in \mathcal{F}$$

Niech $Z.$ będzie przestrzenią symplicjalną z definicji 2.7.3 taką, że $|Z.| = \boldsymbol{B}\mathcal{F}$.

Niech $Y.$ będzie przetrzenią symplicjalną z definicji 2.7.3 taką, że $|Y.| = \boldsymbol{B}\mathcal{U} = B(B\mathcal{U}) = B(\coprod BU_k)$.

Niech $\mathcal{G}$ będzie kategorią topologiczną zdefiniowaną w przykładzie 2.7.7. Pokazaliśmy wówczas, że $\mathcal{G}$ jest częściowym monoidem topologicznym.

Skonstruowaliśmy zatem trzy częściowe monoidy w kategorii $CatTop : \mathcal{U}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$.

Zdefiniujemy teraz ich morfizmy

$$\mathcal{U} \longleftarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G},$$

które indukować będą przekształcenia przestrzeni klasyfikujących

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{B}\mathcal{U} & \longleftarrow & \boldsymbol{B}\mathcal{F} & \longrightarrow & \boldsymbol{B}\mathcal{G} \\ \| & & \| & & \| \\ |Y.| & \longleftarrow & |Z.| & \longrightarrow & |X.| \end{array}$$

Następnie pokażemy, że $\forall\ k \geq 1$ przekształcenia

$$\begin{array}{ccccc} Y_k & \longleftarrow & Z_k & \longrightarrow & X_k \\ \| & & \| & & \| \\ B\mathcal{U}^{(k)} & \longleftarrow & B\mathcal{F}^{(k)} & \longrightarrow & B\mathcal{G}^{(k)} \end{array}$$

są homotopijnymi równoważnościami, skorzystamy ze stwierdzenia 2.4.3 otrzymując homotopijne równoważności

$$\boldsymbol{B}\mathcal{U} \xleftarrow{\simeq} \boldsymbol{B}\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} \boldsymbol{B}\mathcal{G}$$

co zakończy krok 2.

Uwaga 4.1
Przestrzenie symplicjalne $X., Y., Z.$ są przestrzeniami "dobrymi" w sensie

definicji 2.4.2.
Na przykład w przypadku przestrzeni $X.$ zachodzi $X_n = B\mathcal{G}^{(n)} = \mathcal{G}^{(n)}$, a odwzorowania $(\sigma_i)^* : X_{n-1} \to X_n$ są zanurzeniami $\mathcal{G}^{(n-1)} \hookrightarrow \mathcal{G}^{(n)}$ postaci

$$\mathcal{G}^{(n-1)} \ni (E_1, \ldots, E_{n-1}) \mapsto (E_1, \ldots, E_i, 0, E_{i+1}, \ldots, E_{n-1}) \in \mathcal{G}^{(n)},$$

w szczególności domkniętymi korozwłóknieniami.
W przypadku przestrzeni $Y.$ odwzorowania $(\sigma_i)^* : Y_{n-1} \to Y_n$ również są zanurzeniami. W przypadku przestrzeni $Z.$ nie udało nam się explicite wykazać, że odwzorowania $(\sigma_i)^*$ są korozwłóknieniami, lecz argument z pewnością jest podobny (por. [7]).

Zaczniemy od przypadku $k = 1$. Definiujemy wówczas odwzorowania r, d jako kanoniczne projekcje częściowych monoidów w $CatTop$:

$$\mathcal{U} \xleftarrow{r} \mathcal{F} \xrightarrow{d} \mathcal{G}$$

$$\mathbb{C}^n \xleftarrow{r} (\mathbb{C}^n \xrightarrow{\theta} \mathbb{C}^\infty) \xmapsto{d} \operatorname{im}\theta = [\theta]$$

Na początku tego kroku pokazaliśmy, że $\mathcal{U} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{U}(n)$.
Zauważmy, że ponadto $\mathcal{F} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}(n)$ oraz $\mathcal{G} = \coprod_{n=0}^{\infty} \mathcal{G}(n)$, gdzie $\mathcal{F}(n)$ i $\mathcal{G}(n)$ są podkategoriami postaci:
$\mathcal{F}(n) = \{\theta \in \mathcal{F} :\ \theta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^\infty\}$,
$\mathcal{G}(n) = \{[\theta] \in \mathcal{G} :\ \dim \operatorname{im}\theta = n\}$.

Wobec tego odwzorowania r i d można rozłożyć na sumę odwzorowań

$$\mathcal{U}(n) \xleftarrow{r(n)} \mathcal{F}(n) \xrightarrow{d(n)} \mathcal{G}(n)$$

Pokażemy, że $\forall\ n$ odwzorowania $Br(n)$ i $Bd(n)$ są homotopijnymi równoważnościami. Jako natychmiastowy wniosek otrzymamy, że Br i Bd są homotopijnymi równoważnościami.

Zauważmy, że powyższy diagram jest szczególnym przypadkiem diagramu z uwagi 2.5.4, mianowicie

$$G \longleftarrow X_G \longrightarrow X/G$$

dla $X = V_n(\infty)$ (rozmaitość Stiefela), $G = U_n$.

Zgodnie z przykładem 2.5.3 po przejściu do realizacji geometrycznych otrzymujemy diagram

$$\begin{array}{ccccc}
B\mathcal{U}(n) & \longleftarrow & B\mathcal{F}(n) & \longrightarrow & B\mathcal{G}(n) \\
\| & & \| & & \| \\
BU_n & \longleftarrow & EU_n \times_{U_n} V_n(\infty) & \longrightarrow & V_n(\infty)/U_n
\end{array}$$

Co więcej, w tym diagramie odwzorowania w dolnym wierszu są homotopijnymi równoważnościami, bo są przekształceniami lokalnie trywialnymi o ściągalnych włóknach (zarówno EU_n jak i $V_n(\infty)$ są ściągalne).

Stąd otrzymujemy homotopijne równoważności

$$B\mathcal{U} \xleftarrow{\simeq} B\mathcal{F} \xrightarrow{\simeq} B\mathcal{G},$$

co kończy dowód w przypadku $k = 1$.

Do wykazania pozostało jeszcze, że dla każdego $k \geq 1$ odwzorowania indukowane przez r i d prowadzą do homotopijnej równoważności $B\mathcal{U}^{(k)} \simeq B\mathcal{F}^{(k)} \simeq B\mathcal{G}^{(k)}$.

Odwzorowania

$$\mathcal{U}^{(k)} \xleftarrow{r} \mathcal{F}^{(k)} \xrightarrow{d} \mathcal{G}^{(k)}$$

są określone po współrzędnych, mianowicie

$$\begin{array}{l}
\text{ob}\, \mathcal{F}^{(k)} \ni (\theta_1 : \mathbb{C}^{n_1} \to \mathbb{C}^\infty, \ldots, \theta_k : \mathbb{C}^{n_k} \to \mathbb{C}^\infty : \quad \text{im}\, \theta_i \perp \text{im}\, \theta_j \quad \text{dla} \quad i \neq j) \longmapsto \\
\qquad \longmapsto (\mathbb{C}^{n_1}, \ldots, \mathbb{C}^{n_k}) \in \text{ob}\, \mathcal{U}^{(k)} \\
\text{ob}\, \mathcal{F}^{(k)} \ni (\theta_1 : \mathbb{C}^{n_1} \to \mathbb{C}^\infty, \ldots, \theta_k : \mathbb{C}^{n_k} \to \mathbb{C}^\infty : \quad \theta_i \perp \theta_j) \longmapsto \\
\qquad \longmapsto ([\theta_1], \ldots, [\theta_k]) \in \text{ob}\, \mathcal{G}^{(k)}.
\end{array}$$

Zauważmy, że tak jak w poprzednim przypadku kategorie $\mathcal{U}^{(k)}, \mathcal{F}^{(k)}, \mathcal{G}^{(k)}$ rozkładają się na sumy

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}^{(k)} &= \textstyle\coprod_{n_i \geq 1; i=1,\ldots,k}^{\infty} \mathcal{U}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{U}(n_k), \\
\mathcal{F}^{(k)} &= \textstyle\coprod_{n_i \geq 1; i=1,\ldots,k}^{\infty} \mathcal{F}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{F}(n_k), \\
\mathcal{G}^{(k)} &= \textstyle\coprod_{n_i \geq 1; i=1,\ldots,k}^{\infty} \mathcal{G}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{G}(n_k),
\end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{array}{l}
\mathcal{U}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{U}(n_k) = \{(\mathbb{C}^{n_1}, \ldots, \mathbb{C}^{n_k}) \in \mathcal{U}^{(k)}\}, \\
\mathcal{F}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{F}(n_k) = \{(\theta_1, \ldots, \theta_k) \in \mathcal{F}^{(k)} :\ \theta_i : \mathbb{C}^{n_i} \to \mathbb{C}^\infty,\ i = 1, \ldots, k\}, \\
\mathcal{G}(n_1) \times \ldots \times \mathcal{G}(n_k) = \{([\theta_1], \ldots, [\theta_k]) \in \mathcal{G}^{(k)} :\ \dim \text{im}\, \theta_i = n_i,\ i = 1, \ldots, k\}.
\end{array}$$

Ponownie możemy rozłożyć odwzorowania r i d na sumy

$$\mathcal{U}(n_1)\times\ldots\times\mathcal{U}(n_k)\xleftarrow{r(1,\ldots,k)}\mathcal{F}(n_1)\times\ldots\times\mathcal{F}(n_k)\xrightarrow{d(1,\ldots,k)}\mathcal{G}(n_1)\times\ldots\times\mathcal{G}(n_k)$$

Po przejściu do realizacji geometrycznych i skorzystaniu z przykładu 2.5.3 i uwagi 2.5.4 otrzymujemy diagram

$$\begin{tikzcd}
\prod_{i=1}^k B\mathcal{U}(n_i) \arrow[d, equal] & \prod_{i=1}^k B\mathcal{F}(n_i) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \prod_{i=1}^k B\mathcal{G}(n_i) \arrow[d, equal] \\
\prod_{i=1}^k BU_{n_i} & \prod_{i=1}^k EU_{n_i}\times_{\prod_{i=1}^k U_{n_i}}\prod_{i=1}^k V_{n_i}(\infty) \arrow[l] \arrow[r] & \prod_{i=1}^k (V_{n_i}(\infty)/U_{n_i})
\end{tikzcd}$$

Podobnie jak w przypadku $k=1$ w dolnym wierszu mamy odwzorowania lokalnie trywialne o ściągalnych włóknach, czyli homotopijne równoważności (włóknami są tym razem produkty przestrzeni ściągalnych EU_{n_i} oraz $V_{n_i}(\infty)$).

Stąd dla $k\geq 1$ otrzymujemy homotopijne równoważności

$$B\mathcal{U}^{(k)}\xleftarrow{\simeq}B\mathcal{F}^{(k)}\xrightarrow{\simeq}B\mathcal{G}^{(k)}$$

Zatem ze stwierdzenia 2.4.3 wynika homotopijna równoważność

$$\boldsymbol{B}\mathcal{G}\simeq|X.|\simeq|Z.|\simeq|Y.|\simeq\boldsymbol{B}\mathcal{U}\simeq B(\coprod BU_n),$$

co kończy krok 2.

5 Krok 3. $\mathbb{Z}\times BU\simeq\Omega B(\coprod BU_n)$

Niech M będzie monoidem topologicznym. Z definicji przestrzeń klasyfikująca monoidu M to

$$BM=\coprod M^n\times\triangle^n/\sim.$$

Definiujemy $\lambda: M\to\Omega BM$ wzorem:

$$\lambda(m)(t)=[m,t]\in M^1\times\triangle^1.$$

Na ΩBM struktura H – przestrzeni jest dana przez składanie pętli.
Ustalmy $m\in M$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "m"'] & \Omega BM \arrow[d, "\lambda(m)"] \\
M \arrow[r, "\lambda"'] & \Omega BM
\end{tikzcd}$$

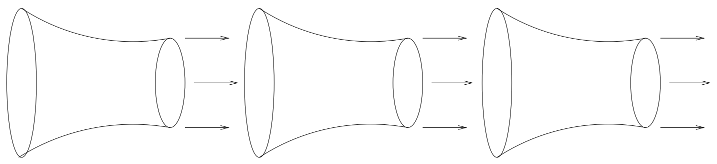
Powyższy diagram, w którym pionowe strzałki są mnożeniem przez odpowiedni element, jest homotopijnie przemienny. Co więcej: mnożenie przez $\lambda(m)$ jest homotopijną równoważnością.

Definicja 5.1
Teleskop systemu prostego (tj. ciągu odwzorowań ciągłych)

$$X_* = X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$$

definiujemy jako

$$\mathrm{Tel}(X_*) = \coprod_n X_n \times I/\sim, \quad (x,0) \sim (f_i(x),1).$$



Rysunek 3: $\mathrm{Tel}(X_*)$

Istnieją kanoniczne inkluzje $j_k : X_k \hookrightarrow \mathrm{Tel}(X_*)$ takie, że $j_k \sim j_{k+1} \circ f_k$.
Co więcej: dla dowolnej rodziny odwzorowań $g_k : X_k \to Y$ takiej, że $j_k \sim j_{k+1} \circ g_k$ można skonstruować $g : \mathrm{Tel}(X_*) \to Y$ takie, że $g \circ j_k \sim g_k$.

Stwierdzenie 5.2
Jeżeli $F : X_* \to Y_*$ jest odwzorowaniem systemów prostych takim, że dla każdego k $F_k : X_k \to Y_k$ jest homotopijną równoważnością, to indukowane $F_* : \mathrm{Tel}(X_*) \to \mathrm{Tel}(Y_*)$ jest homotopijną równoważnością.

Dowód
F jest odwzorowaniem systemów prostych, zatem następujący diagram jest przemienny:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "F_0"'] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F_1"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "F_2"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, "g_0"'] & Y_1 \arrow[r, "g_1"'] & Y_2 \arrow[r, "g_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Wiemy, że $\forall$ k odwzorowanie $F_k : X_k \to Y_k$ jest homotopijną równoważnością, zatem istnieją odwzorowania $F'_k : Y_k \to X_K$, które są odpowiednimi homotopijnymi odwrotnościami, tzn. $F'_k \circ F_k \simeq \mathrm{id}_{X_k}$ oraz $F_k \circ F'_k \simeq \mathrm{id}_{Y_k}$. Wobec tego następujący diagram jest homotopijnie przemienny:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & \cdots \\
Y_0 \arrow[u, "F_0"] \arrow[r, "g_0"'] & Y_1 \arrow[u, "F'_1"] \arrow[r, "g_1"'] & Y_2 \arrow[u, "F'_2"] \arrow[r, "g_2"'] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Przypadek 1. Załóżmy, że $\forall\ k$ odwzorowania f_k i g_k są korozwłóknieniami, czyli diagram będzie wyglądał następująco:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_0"'] & X_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_1"'] & X_2 \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_2"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, hook] & Y_1 \arrow[r, hook] & Y_2 \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Indukcyjnie skonstruujemy przekształcenie systemów prostych $G : Y_* \to X_*$ takie, że $\forall\ k$ odwzorowania G_k będą homotopijne z F'_k i następujący diagram będzie przemienny:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] & X_1 \arrow[r, hook] & X_2 \arrow[r, hook] & \cdots \\
Y_0 \arrow[u, "G_0"'] \arrow[r, hook] & Y_1 \arrow[u, "G_1"'] \arrow[r, hook] & Y_2 \arrow[u] \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Niech $G_0 = F'_0$. Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy G_k. Pokażemy, jak skonstruować G_{k+1}.
Wiemy, że $G_k \simeq F'_k$, zatem $G_k \simeq F'_{k+1}|_{Y_k}$ z homotopijnej przemienności diagramu (1).
Definiujemy odwzorowanie $h : Y_{k+1} \cup Y_k \times I \longrightarrow Y_{k+1}$ następująco:
na Y_{k+1} kładziemy F'_{k+1}, a na $Y_k \times I$ homotopię od $F'_{k+1}|_{Y_k}$ do G_k.
Włożenie $Y_k \subset Y_{k+1}$ jest korozwłóknieniem, zatem h przedłuża się do $H : Y_{k+1} \to Y_{k+1}$ takiego, że $H(y,0) = F'_{k+1}(y)$ oraz $H(y,1)|_{Y_k} = G_k(y)$.
Niech $G_{k+1} = H(\cdot, 1)$. Wówczas H jest homotopią od F'_{k+1} do G_{k+1}, a zatem

$$\begin{aligned}
G_{k+1} \circ F_{k+1} &\simeq F'_{k+1} \circ F_{k+1} \simeq \mathrm{id}_{X_{k+1}} \\
F_{k+1} \circ G_{k+1} &\simeq F_{k+1} \circ F'_{k+1} \simeq \mathrm{id}_{Y_{k+1}}
\end{aligned}$$

i diagram (1) jest przemienny.
Wobec tego indukcyjnie określone odwzorowanie systemów prostych $G : Y_* \to X_*$ indukuje przekształcenie teleskopów $G_* : \mathrm{Tel}(Y_*) \to \mathrm{Tel}(X_*)$, a ponadto $F_* \circ G_* \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Tel}(X_*)}$ oraz $G_* \circ F_* \simeq \mathrm{id}_{\mathrm{Tel}(Y_*)}$.

Stąd F_* jest homotopijną równoważnością.

Przypadek 2. Gdy f_k i g_k są dowolnymi przekształceniami, to sprowadzamy dowód do przypadku poprzedniego. Mamy następujący diagram:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & W(f_0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_1"'] & W(f_1 \circ f_0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "r_2"'] & \cdots \\
X_0 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "F_0"'] & X_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F_1"'] & X_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "F_2"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, "g_0"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Y_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d, "i_1"'] & Y_2 \arrow[r, "g_2"'] \arrow[d, "i_2"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, hook] & W(g_0) \arrow[r, hook] & W(g_1 \circ f_0) \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{2}$$

w którym: $W(f)$ oznacza cylinder przekształcenia $f : A \to B$, r_k oznacza retrakcję $W(f) \to B$, i_k oznacza inkluzję $A \to W(f)$. W szczególności r_k oraz i_k są swoimi homotopijnymi odwrotnościami.
Zauważmy, że w diagramie (2) pierwszy i drugi wiersz są przemienne, a trzeci jest homotopijnie przemienny. Ponadto wszystkie odwzorowania w systemach prostych

$$\begin{array}{ll} X_0 \subset W(f_0) \subset W(f_1 \circ f_0) \subset \dots & \text{oraz} \\ Y_0 \subset W(g_0) \subset W(g_1 \circ g_0) \subset \dots & \end{array}$$

są korozwłóknieniami [13,1.4].
Łatwo sprawdzić, że istnieją homotopijne równoważności:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Tel}(X_*) \simeq \mathrm{Tel}\big(X_0 \subset W(f_0) \subset W(f_1 \circ f_0) \subset \dots\big) & \text{oraz} \\ \mathrm{Tel}(Y_*) \simeq \mathrm{Tel}\big(Y_0 \subset W(g_0) \subset W(g_1 \circ g_0) \subset \dots\big) & \end{array}$$

Zatem $F_* : \mathrm{Tel}(X_*) \to \mathrm{Tel}(Y_*)$ możemy interpretować jako odwzorowanie indukowane przez następujące przekształcenie systemów prostych:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d, "F_0"'] & W(f_0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "i_1 \circ F_1 \circ r_1"'] & W(f_1 \circ f_0) \arrow[r, hook] \arrow[d, "i_2 \circ F_2 \circ r_2"'] & \cdots \\
Y_0 \arrow[r, hook] & W(g_0) \arrow[r, hook] & W(g_1 \circ g_0) \arrow[r, hook] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Zauważmy, że w ten diagram jest przemienny. Co więcej wszystkie pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami. Wobec tego udało się sprowadzić sytuację do przypadku 1, co kończy dowód stwierdzenia. ■

Wniosek 5.3
Jeżeli w systemie prostym X_* wszystkie odwzorowania są homotopijnymi równoważnościami, to $X_0 \simeq \mathrm{Tel}(X_*)$.

Dowód
Mamy homotopijną równoważność następujących systemów prostych:

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & X_3 \arrow[r, "f_3"] & \cdots \\
X_0 \arrow[u, "\mathrm{id}"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X_0 \arrow[u, "f_0"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X_0 \arrow[u, "f_1 f_0"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & X_0 \arrow[u, "f_2 f_1 f_0"] \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Stąd $X_0 \simeq \mathrm{Tel}(X_*)$, bo wszystkie pionowe strzałki są homotopijnymi równoważnościami. ■

Niech M będzie monoidem topologicznym.
Załóżmy, że $\pi_0(M)$ jest monoidem skończenie generowanym, a $m_1, \ldots, m_k \in M$ są reprezentantami klas generatorów.

Niech $m = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$.

Mamy dwa systemy proste:

- $M \xrightarrow{m} M \xrightarrow{m} M \xrightarrow{m} \cdots,$
- $\Omega BM \xrightarrow{\lambda(m)} \Omega BM \xrightarrow{\lambda(m)} \Omega BM \xrightarrow{\lambda(m)} \cdots.$

Zauważmy, że w drugim z nich wszystkie odwzorowania są homotopijnymi równoważnościami, zatem jego teleskop jest homotopijnie równoważny z ΩBM.
Oznaczmy przez M_∞ teleskop pierwszego systemu.

Zdefiniowaliśmy przekształcenie $\lambda : M \to \Omega BM$. Przedłuża się ono do odwzorowania teleskopów:

$$\lambda_\infty : M_\infty \longrightarrow \Omega BM.$$

Twierdzenie 5.4 (Twierdzenie o Uzupełnianiu Grupowym) [2]
λ_∞ indukuje izomorfizm homologii

$$(\lambda_\infty)_* : H_*(M_\infty; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\Omega BM; \mathbb{Z}).$$

Niech $\mathcal{U}$ będzie kategorią topologiczną zdefiniowaną jak w kroku 2.
Pokazaliśmy wówczas, że $\mathcal{U}$ jest monoidem w kategorii *CatTop* z mnożeniem $\mu(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m) = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^m$.
Stąd i ze stwierdzenia 2.5.2 wynika, że $B\mathcal{U}$ jest monoidem topologicznym z indukowanym mnożeniem $B\mu : B\mathcal{U} \times B\mathcal{U} \to B\mathcal{U}$.

Zauważmy, że $B\mathcal{U} \approx \coprod B\mathcal{U}(n)$, gdzie $\mathcal{U}(n)$ jest kategorią odpowiadającą grupie U_n, tj. kategorią z jednym obiektem i morfizmami wyznaczonymi przez U_n.

Zatem istnieje izomorfizm monoidów $\pi_0(B\mathcal{U}) \simeq \mathbb{Z}^+$, przy którym składowa $B\mathcal{U}(k)$ przechodzi na $k \in \mathbb{Z}^+$ dla $k \geq 0$.
W szczególności $\pi_0(B\mathcal{U})$ jest monoidem o jednym generatorze.

Stwierdzenie 5.5
Istnieje homotopijna równoważność $(B\mathcal{U})_\infty \simeq \mathbb{Z} \times BU$.

Dowód
Niech $\imath$ będzie reprezentantem klasy generatora $\pi_0(B\mathcal{U})$, tj. $\imath = B(\mathbb{C}^1) \in B\mathcal{U}(1)$.
Odwzorowanie $\imath : B\mathcal{U} \to B\mathcal{U}$ jest indukowane przez mnożenie $\imath = \mu(\cdot, \mathbb{C}^1) : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ przez $\mathbb{C}^1$ (generator), tj. $\imath(\mathbb{C}^n) = \mu(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^1) = \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^1$.
Z własności teleskopu i funktora B wynika, że:

$$\mathrm{Tel}(B\mathcal{U} \xrightarrow{\imath} B\mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \cdots) \simeq B\,\mathrm{colim}(\mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \cdots).$$

Pokażemy, że istnieje równoważność kategorii:

$$\mathrm{colim}(\mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \cdots) \simeq \mathbb{Z} \times U,$$

gdzie $\mathbb{Z}$ jest kategorią dyskretną, a U kategorią z jednym obiektem i morfizmami wyznaczonymi przez grupę U.
Z definicji

$$\mathrm{colim}(\mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \mathcal{U} \xrightarrow{\imath} \cdots) = (\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{U})/\sim .$$

Odwzorowanie

$$(k, \mathbb{C}^n \xrightarrow{A} \mathbb{C}^n) \longmapsto (k-n, \mathbb{C}^\infty \xrightarrow{A \oplus \mathrm{id}} \mathbb{C}^\infty)$$

definiuje równoważność kategorii

$$(\mathbb{Z}^+ \times \mathcal{U})/\sim \quad \simeq \quad \mathbb{Z} \times \mathcal{U}.$$

Wobec tego

$$(B\mathcal{U})_\infty \simeq B(\mathbb{Z} \times U) \simeq B\mathbb{Z} \times BU \simeq \mathbb{Z} \times BU,$$

bo $\mathbb{Z}$ jest kategorią dyskretną. ■

Twierdzenie 5.6 (Whitehead) [13,7.5]
Odwzorowanie jednospójnych CW – kompleksów $f : X \to Y$ jest homologiczną równoważnością $\iff$ jest homotopijną równoważnością.

Wniosek 5.7
$\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega B(B\mathcal{U}) \simeq \Omega B(\coprod BU_n)$.

Dowód
Z twierdzenia 5.4 i stwierdzenia 5.5 mamy homologiczną równoważność między $\mathbb{Z} \times BU$ a $\Omega B(B\mathcal{U})$, gdzie $B\mathcal{U} = \coprod BU_n$.
Obie przestrzenie są CW – kompleksami, zatem by skorzystać z twierdzenia 5.6 wystarczy pokazać, że wszystkie składowe zarówno $\mathbb{Z} \times BU$ jak i $\Omega B(B\mathcal{U})$, są jednospójne.
BU jest przestrzenią jednospójną, zatem każda składowa $\mathbb{Z} \times BU$ jest jednospójna.
Zauważmy, że dla dowolnej przestrzeni pętli ΩX jej grupa podstawowa jest abelowa, bo:

$$\pi_1(\Omega X, \omega_{x_0}) = \pi_1((\Omega X)_{\text{skł } \omega_{x_0}}, \omega_{x_0}) = \left[S^1, \Omega X\right]_* = \left[\Sigma S^1, X\right]_* = \left[S^2, X\right]_* = \pi_2(X).$$

Stąd grupa podstawowa składowej punktu $\omega_{x_0} \in \Omega B(B\mathcal{U})$ jest abelowa.
Zatem jeśli ΩX będzie oznaczać składową punktu ω_{x_0} w $\Omega B(B\mathcal{U})$, to:

$$\pi_1(\Omega X) = \pi_1(\Omega X)_{\text{ab}} = H_1(\Omega X) = H_1(BU) = \pi_1(BU) = 0.$$

Wobec tego każda składowa $\Omega B(B\mathcal{U})$ jest jednospójna.
Z twierdzenia Whiteheada otrzymujemy homotopijną równoważność $\mathbb{Z} \times BU \simeq \Omega B(B\mathcal{U})$. ■

6 Dowód tw. Botta o periodyczności wg Charlesa H. Giffena

Charles H. Giffen w [7] prezentuje nieco inną metodę dowodu twierdzenia Botta wykorzystującą realizacje geometryczne małych kategorii, aczkolwiek

korzysta on z pomysłu Bruno Harrisa [8] i dowód Giffena częściowo pokrywa się z pracą Harrisa.
Dowód Giffena jest o tyle ogólniejszy od dowodu Harrisa, że jest prawdziwy zarówno w przypadku zespolonym jak i rzeczywistym.
Przedstawimy teraz ideę dowodu Giffena w przypadku zespolonym.
Otóż najpierw konstruuje on przestrzeń symplicjalną $\Gamma.(\mathbb{C})$ jako sumę przestrzeni symplicjalnych $\Gamma(n,\mathbb{C}) \hookrightarrow \Gamma(n+1,\mathbb{C})$. Okazuje się, że $\Gamma(\mathbb{C}) = ||\Gamma.(\mathbb{C})|| \simeq B(\coprod BU_n)$, co nie jest nota bene jawnie stwierdzone w pracy Giffena. Następnie Giffen definiuje kategorię topologiczną $Q(\mathbb{C})$ jako sumę kategorii topologicznych $Q(n,\mathbb{C}) \hookrightarrow Q(n+1,\mathbb{C})$. $Q(\mathbb{C})$ jest taka, że $BQ(\mathbb{C}) \simeq B\mathrm{Gr}$ w terminach dowodu Harrisa. Okazuje się, że podpodziałem krawędziowym $\Gamma(n,\mathbb{C})$ jest nerw kategorii $Q(n,\mathbb{C})$, co indukuje homeomorfizm $\Gamma(n,\mathbb{C}) \approx BQ(n,\mathbb{C})$, a następnie homeomorfizm $\Gamma(\mathbb{C}) \approx BQ(\mathbb{C})$. Dalej konstruuje homeomorfizm $\Gamma(\mathbb{C}) \approx BQ(\mathbb{C}) \approx \mathcal{U}$ w dokładnie taki sam sposób, jak w dowodzie Harrisa. Następnie, unikając korzystania z Twierdzenia o Uzupełnianiu Grupowym , Giffen konstruuje rozwłóknienie $\mathbb{Z} \times B\mathcal{U} \hookrightarrow E(\mathbb{C}) \longrightarrow \Gamma(\mathbb{C})$ ze ściągalną przestrzenią $E(\mathbb{C})$, co daje mu homotopijną równoważność

$$\Omega\mathcal{U} \simeq \Omega\Gamma(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z} \times B\mathcal{U},$$

i kończy dowód twierdzenia Botta o periodyczności w przypadku zespolonym.

7 Bibliografia

[**1**] M. F. Atiyah, "Bott periodicity and the index of elliptic operators", Quart. J. Math. Oxford (2) 19, 113 – 140 (1968)

[**2**] D McDuff & G. Segal, "Homology fibrations and the Group Completion Theorem", Inventiones math. 31, 279 – 284 (1976)

[**3**] Eldon Dyer, "Cohomology theories", Mathematics Lecture Note Series, New York 1969

[**4**] A. T. Fomenko & D. B. Fuks & V. L. Gutenmacher, "Homotopic topology", Budapest 1986

[**5**] P. Gabriel & M. Zisman, "Calculus of fractions and homotopy theory", Springer Verlag, Berlin 1967

[**6**] S. I. Gelfand & Yu. I. Manin, "Methods of homological algebra"

[**7**] Charles H. Giffen, "Bott periodicity and the Q – construction", Contemporary Mathematics 199 (1996)

[**8**] Bruno Harris, "Bott periodicity via simplicial spaces", Journal of Algebra 62, 450 – 454 (1980)

[**9**] A. Kono & K. Tokunaga, "A topological proof of Bott periodicity theorem and a characterization of BU", J. Math. Kyoto Univ. 34 – 4, 873 –880 (1994)

[**10**] A. I. Kostrikin & J. I. Manin, "Algebra liniowa i geometria", PWN, Warszawa 1993

[**11**] Graeme Segal, "Categories and cohomology theories", Topology 13, 293 – 312 (1974)

[**12**] Graeme Segal, "Classifying spaces and spectral sequences", Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 34, 105 – 112 (1968)

[**13**] E. H. Spanier, "Topologia algebraiczna", PWN, Warszawa 1972