Zastosowanie operadu $\mathcal{E}$ do konstrukcji kwadratów Steenroda

Marcin Mucha

15 maja 2002

Spis treści

1 Wstęp

Pojęcie operadu jest abstrakcją rodziny funkcji, które można składać (większość definicji uwzględnia także działania grup symetrycznych przez permutowanie zmiennych). Jako pierwszy operady zdefiniował i użył do badania nieskończonych przestrzeni pętli P. May w pracy [5] w 1972 roku. Podobne pojęcia pojawiały się jednak, pod innymi nazwami, także we wcześniejszych pracach.

Teoria operadów, traktowana początkowo jako narzędzie w teorii homotopii zyskała w ostatnich latach zastosowania w algebrze homologicznej, teorii kategorii, geometrii algebraicznej, a nawet w fizyce (doskonały opis zastosowań operadów można znaleźć w [6]). Spowodowało to ogromny wzrost zainteresowania tą dziedziną.

Operad $\mathcal{E}$ opisywany w tej pracy oparty jest na klasycznej konstrukcji przestrzeni klasyfikującej podanej przez Barratta i Ecclesa w [1]. Ciekawe wyniki dotyczące operadu $\mathcal{E}$ uzyskał Mandell w [4]. Pokazał on między innymi, że struktura algebry nad operadem $\mathcal{E}$ na kompleksie kołańcuchów zbioru symplicjalnego wyznacza, przy pewnych założeniach, typ homotopijny tego zbioru.

Struktura algebry przemiennej na kohomologiach zbioru symplicjalnego pochodzi od operacji $\cup$. Operacja ta na poziomie kołańcuchów nie jest przemienna. Przy współczynnikach w $\mathbb{F}_2$ korzystając z tej nieprzemienności można zdefiniować kwadraty Steenroda (nieco bardziej skomplikowane konstrukcje można także przeprowadzić dla współczynników w dowolnym ciele $\mathbb{F}_p$). Na kompleksie kołańcuchów istnieje struktura $\mathcal{E}$-algebry. Struktura ta obejmuje zarówno $\cup$-produkt, jak i kwadraty Steenroda. Co istotne, definicje tych operacji wynikające ze struktury $\mathcal{E}$-algebry są konstruktywne.

W październiku 2000 w ramach szkoły LOLA (Localizations and Operads Learning About) Benoit Fresse wygłosił cykl wykładów na temat operadów, a w szczególności operadu $\mathcal{E}$. W naszym opracowaniu staramy się uzupełnić dowody i wyjaśnienia, które nie znalazły się w materiałach kursu szkoły LOLA. Chodzi tu między innymi o opis odwzorowania SHUFFLE (w 2.2), sprawdzenia aksjomatów dla operadu permutacji (w 3.1) i wynikających z nich aksjomatów dla operadów $\mathcal{W}$ i $\mathcal{E}$, dużo obszerniejszy opis operadu cięć odcinków (w 4.2) i zawarty w nim dowód poprawności konstrukcji morfizmu $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$ i przede wszystkim liczne fragmenty rozdziału 5 poświęconego operacjom Steenroda.

Celem wykładu B. Fresse jest między innymi prezentacja wspomnianych wyników Mandela, stąd bardzo pobieżny przegląd elementarnych własności operadu $\mathcal{E}$, które są tematem naszej pracy. Dużo dokładniej opiszemy operadową konstrukcję operacji Steenroda, przypominając podobną do niej oryginalną konstrukcję Steenroda ([7]).

Chciałbym w tym miejscu podziękować mojemu promotorowi – pani Agnieszce Bojanowskiej, z której inicjatywy zrodził się pomysł napisania tej pracy i której uwagi w znaczący sposób wpłynęły na jej ostateczny kształt. Jestem także wdzięczny Benoit Fresse'owi, który niestrudzenie odpowiadał na moje liczne pytania dotyczące operadów.

2 Podstawowe definicje

W tym rozdziale definiujemy potrzebne w następnych rozdziałach klasyczne pojęcia. Wprowadzamy również używane w obrębie pracy notacje.

2.1 Permutacje, grupy symetryczne

Permutacje zbioru $\{1 \ldots n\}$ będziemy zapisywać w postaci nawiasowej, a więc permutację $s : \{1 \ldots n\} \to \{1 \ldots n\}$ zapiszemy jako $(s(1) \ldots s(n))$.

Przez Σ_n będziemy oznaczać grupę symetryczną, czyli grupę permutacji zbioru $\{1 \ldots n\}$ wraz z operacją złożenia permutacji. Grupa Σ_n działa na sobie z lewej strony przez złożenie permutacji. Dowolne działanie grupy symetrycznej będziemy oznaczać przez dopisanie permutacji po lewej stronie. W przypadkach, w których takie oznaczenie może być niejasne, będziemy stosować symbol $\cdot$.

Sumą prostą permutacji $s \in \Sigma_n$ i $t \in \Sigma_m$ nazywamy permutację

$$s \oplus t = (s(1), \ldots, s(n), n + t(1), \ldots, n + t(m)) \in \Sigma_{n+m} \tag{2.1}$$

Permutacja $s \oplus t$ jest równa s na liczbach $1, \ldots, n$ i "równa" t na liczbach $n+1, \ldots, n+m$. Analogicznie można definiować sumę prostą więcej niż dwu permutacji, choć nie jest to konieczne, bo działanie $\oplus$ jest łączne.

Łatwo zauważyć, że operacja sumy prostej spełnia następującą równość

$$(s_1 \oplus \ldots \oplus s_n) \cdot (t_1 \oplus \ldots \oplus t_n) = (s_1 t_1) \oplus \ldots \oplus (s_n t_n) \tag{2.2}$$

dla dowolnych $s_1, t_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, s_n, t_n \in \Sigma_{i_n}$

Niech $s \in \Sigma_n$ oraz $i_1, \ldots, i_n \geq 0$. *Permutacja blokowa* $s_*(i_1, \ldots, i_n) \in \Sigma_{i_1 + \ldots + i_n}$ permutuje bloki o rozmiarach $i_1, \ldots, i_n$ "w taki sposób" jak permutacja s permutuje liczby $1, \ldots, n$. Niech L_k dla $k = 1, \ldots, n$ będzie ciągiem

$$L_k = i_1 + \ldots + i_{k-1} + 1, i_1 + \ldots + i_{k-1} + 2, \ldots, i_1 + \ldots + i_{k-1} + i_k$$

a więc k-tym blokiem. Wtedy

$$s_*(i_1, \ldots, i_n) = (L_{s(1)}, \ldots, L_{s(n)}) \tag{2.3}$$

Na przykład jeśli $t \in \Sigma_2$ jest transpozycją to

$$t_*(p, q) = (p + 1, \ldots, p + q, 1, \ldots, p)$$

Łatwo zauważyć, że dla dowolnych $s, t \in \Sigma_n$ spełniona jest równość

$$s_*(i_1, \ldots, i_n) \cdot t_*(i_{s(1)}, \ldots, i_{s(n)}) = (st)_*(i_1, \ldots, i_n) \tag{2.4}$$

Ponadto dla $s \in \Sigma_n$ i $t_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, t_n \in \Sigma_{i_n}$ zachodzi

$$(t_1 \oplus \ldots \oplus t_n) \cdot s_*(i_1, \ldots, i_n) = s_*(i_1, \ldots, i_n) \cdot (t_{s(1)} \oplus \ldots \oplus t_{s(n)}) \tag{2.5}$$

(można najpierw permutować bloki, a potem ich zawartości lub odwrotnie, najpierw zawartości, później bloki).

2.2 Zbiory symplicjalne, ich homologie i kohomologie

Jako modeli przestrzeni topologicznych będziemy w naszych rozważaniach używać zbiorów symplicjalnych. Dobre wprowadzenie do tematyki zbiorów symplicjalnych można znaleźć w pracy [3], która jest źródłem używanych przez nas w dalszym ciągu oznaczeń i terminologii.

Na początek przypomnijmy definicję zbioru symplicjalnego. Oznaczmy przez Δ kategorię, której obiektami są zbiory uporządkowane postaci $\mathbf{n} = \{0, 1, \ldots, n\}$, a morfizmami funkcje niemalejące. Łatwo sprawdzić, że każdą taką funkcję można uzyskać przez składanie funkcji $d^i : \mathbf{n-1} \to \mathbf{n}$ postaci:

$$d^i(j) = \begin{cases} j & \text{dla } j < i \\ j+1 & \text{dla } j \geq i \end{cases}$$

i funkcji $s^i : \mathbf{n+1} \to \mathbf{n}$ postaci:

$$s^i(j) = \begin{cases} j & \text{dla } j \leq i \\ j-1 & \text{dla } j > i \end{cases}$$

Morfizmy tę spełniają następujące oczywiste zależności:

$$\begin{aligned} d^j d^i &= d^i d^{j-1} \text{ dla } i < j \\ s^j s^i &= s^i s^{j+1} \text{ dla } i \leq j \\ s^j d^i &= d^i s^{j-1} \text{ dla } i < j \\ s^j d^j &= \mathbf{1} = s^j d^{j+1} \\ s^j d^i &= d^{i-1} s^j \text{ dla } i > j+1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Zbiorem symplicjalnym nazywamy funktor kontrawariantny z kategorii Δ do kategorii $\mathcal{S}et$. Niech $X : \Delta \to \mathcal{S}et$ będzie zbiorem symplicjalnym. Wtedy zbiór $X(\mathbf{n})$ nazywamy *zbiorem sympleksów n-wymiarowych* X i oznaczamy krótko X_n. Niech ponadto $d_i = X(d^i) : X_n \to X_{n-1}$ oraz $s_i = X(s^i) : X_n \to X_{n+1}$ dla $0 \leq i \leq n$. Odwzorowania d_i i s_i nazywamy odpowiednio *odwzorowaniami ścian* i *odwzorowaniami degeneracji.* Sympleks $d_i(s)$ nazywamy i-tą ścianą sympleksu s, natomiast dowolny sympleks postaci $s_i(s)$ nazywamy sympleksem zdegenerowanym. Odwzorowania d_i i s_i spełniają zależności analogiczne do (2.6):

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \text{ dla } i < j \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \text{ dla } i \leq j \\ d_i s_j &= s_{j-1} d_i \text{ dla } i < j \\ d_j s_j &= \mathbf{1} = d_{j+1} s_j \\ d_i s_j &= s_j d_{i-1} \text{ dla } i > j+1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Kategorię zbiorów symplicjalnych będziemy oznaczać symbolem $\mathcal{S}$.

Dla zbioru symplicjalnego X przez $C_*(X;\mathbb{F})$ oznaczamy *dg*-moduł (tak będziemy w skrócie nazywać moduły z różniczką i gradacją), którego n-ty wyraz C_nX jest wolnym $\mathbb{F}$-modułem generowanym przez X_n. Nazywamy go *kompleksem łańcuchów* X. Różniczka w tym kompleksie jest opisana formułą:

$$\partial(x) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i(x)$$

We wzorze tym, jak w wielu innych używanych w tej pracy, pojawiają się znaki. Dla uproszczenia rachunków przyjmiemy, że ciało $\mathbb{F}$ nad którym pracujemy jest charakterystyki 2 i we wzorach będziemy z reguły pomijać znaki.

Znormalizowany kompleks łańcuchów X, $N_*(X;\mathbb{F})$ stanowi podkompleks $C_*(X;\mathbb{F})$ generowany tylko przez sympleksy niezdegenerowane. Różniczka $\partial : C_n(X;\mathbb{F}) \to C_{n-1}(X;\mathbb{F})$ obcina się do odwzorowania $N_n(X;\mathbb{F}) \to N_{n-1}(X;\mathbb{F})$, które będziemy oznaczać symbolem ∂, tak samo jak różniczkę na $C_*(X;\mathbb{F})$. Kompleks $N_*(X;\mathbb{F})$ ma, co łatwo pokazać, takie same homologie i kohomologie jak odpowiadający mu kompleks $C_*(X;\mathbb{F})$. Często wygodniej jest stosować kompleks $N_*(X;\mathbb{F})$ ze względu to, że jest mniejszy od $C_*(X;\mathbb{F})$.

Czasem dobrze jest myśleć o kompleksie znormalizowanym jako o ilorazie:

$$N_*(X;\mathbb{F}) = C_*(X;\mathbb{F})/(s_0C_{*-1}(X;\mathbb{F}) + \ldots + s_{*-1}C_{*-1}(X;\mathbb{F})) \tag{2.8}$$

(należy jednak pamiętać, że różniczka nie jest kongruencją relacji, przez którą dzielimy w tej definicji, ponieważ może ona na sympleksie zdegenerowanym przyjąć wartość nie będącą sumą sympleksów zdegenerowanych). Ta definicja jest o tyle wygodna, że pozwala ona na użycie przy opisie elementów $N_*(X;\mathbb{F})$ także sympleksów zdegenerowanych. Przyjmujemy wtedy po prostu, że mają one wartość zero.

W dalszym ciągu będziemy z reguły używać kompleksu $N_*(X;\mathbb{F})$. Na kompleksie tym będziemy definiować odwzorowania, które tradycyjnie definiuje się dla kompleksu $C_*(X;\mathbb{F})$. Należy pamiętać, że nie da się tych znormalizowanych odpowiedników zdefiniować przez podzielenie przez relację (2.8) (tak jak różniczka, nie przyjmują one stałej wartości na klasach abstrakcji). Zamiast tego należy obciąć odwzorowania określone na $C_*(X;\mathbb{F})$ do $N_*(X;\mathbb{F})$, tak jak postąpiliśmy z różniczką. Jeśli pojawią się w definicji sympleksy zdegenerowane, należy potraktować je jako równe 0.

Kohomologie zbioru symplicjalnego X będziemy otrzymywać jako homologie kompleksów dualnych (oznaczanych $C^*(X;\mathbb{F})$ i $N^*(X;\mathbb{F})$) bądź jako kohomologie $C_*(X;\mathbb{F})$ i $N_*(X;\mathbb{F})$. W dalszym ciągu nie będziemy uwzględniać w oznaczeniach ciała $\mathbb{F}$ tam, gdzie z kontekstu będzie to jasno wynikać. W szczególności będziemy pisać $C_*(X)$ zamiast $C_*(X;\mathbb{F})$ i $N_*(X)$ zamiast $N_*(X;\mathbb{F})$.

Istnieje ścisły związek między przestrzeniami topologicznymi, a zbiorami symplicjalnymi. Dla dowolnej przestrzeni topologicznej X kompleks łańcuchów singularnych X jest zbiorem symplicjalnym o homologiach identycznych z homologiami X. Równocześnie każdy zbiór symplicjalny posiada realizację geometryczną o homologiach identycznych z homologiami tego zbioru. Co więcej, konstrukcje te są sprzężone w sensie kategoryjnym. Można więc mówić o zbiorach symplicjalnych jako o kombinatorycznych modelach przestrzeni topologicznych, często wygodniejszych niż triangulacja czy CW-struktura choćby dlatego, że niektóre przestrzenie nie dopuszczają żadnej z powyższych.

Na kohomologiach zbioru symplicjalnego istnieje struktura algebry przemiennej z gradacją. Pochodzi ona od operacji $\cup$ określonej już na poziome kołańcuchów znormalizowanych:

$$\cup : N^*X \otimes N^*X \to N^*X$$

Operacja ta na poziomie kołańcuchów jest przemienna tylko z dokładnością do homotopii. Okaże się jednak, że podejście operadowe pozwala dokładnie zbadać strukturę algebry zadaną przez tę operację.

Produktem kartezjańskim zbiorów symplicjalnych X i Y nazywamy zbiór symplicjalny $X \times Y$ taki, że $(X \times Y)_n = X_n \times Y_n$. Odwzorowania ścian i degeneracji działają po współrzędnych:

$$d_i(x, y) = (d_i x, d_i y)$$
$$s_j(x, y) = (s_j x, s_j y)$$

dla $x \in X_n$, $y \in Y_n$.

Produktem tensorowym kompleksów łańcuchowych A_* i B_* nazywamy kompleks łańcuchowy $(A \otimes B)_*$ taki, że:

$$(A \otimes B)_n = \bigoplus_{i+j=n} A_i \otimes B_{n-i} \tag{2.9}$$

Różniczka w kompleksie $(A \otimes B)_*$ zdefiniowana jest następująco:

$$\partial(v \otimes w) = \partial(v) \otimes w + v \otimes \partial(w) \tag{2.10}$$

(w przypadku ciał charakterystyki różnej od 2 drugi wyraz występuje z odpowiednim znakiem).

Okazuje się, że istnieje naturalna łańcuchowa homotopijna równoważność między kompleksami $N_*(X \times Y)$ i $N_*X \otimes N_*Y$ (Eilenberg-Zilber). Niekiedy (np. w poniższej pracy) przydaje się znajomość konkretnej pary łańcuchowych homotopijnych równoważności. Najbardziej popularną i najprostszą parę stanowią odwzorowania:

$$AW : N_*(X \times Y) \to N_*X \otimes N_*Y \text{ (Alexandera-Whitneya)}$$
$$EZ : N_*X \otimes N_*Y \to N_*(X \times Y) \text{ (Eilenberga-Zilbera)}$$

W definicji tych odwzorowań będziemy używać opisu sympleksu przez ciąg wierzchołków, ale jasne jest, że opis ten łatwo tłumaczy się na język degeneracji i ścian. Dla przykładu jeśli X jest zbiorem symplicjalnym, $s \in X_n$ sympleksem n-wymiarowym, to i-ty wierzchołek s jest opisany wzorem $(X(f))(s)$, gdzie $f : \mathbf{1} \to \mathbf{n}$, $f(1) = i$. Odwzorowanie $X(f)$ daje się oczywiście zapisać jako złożenie pewnych odwzorowań d_i.

Niech $s = (s_0, \ldots, s_n)$ będzie sympleksem. *i-wymiarową przednią ścianą s* nazywamy sympleks $s[_i = (s_0, \ldots, s_i)$, a *$i$-wymiarową tylną ścianą s* sympleks $s]_i = (s_{n-i}, \ldots, s_n)$. Jeśli s jest n-wymiarowym sympleksem w $X \times Y$ to $AW(s)$ określamy następująco:

$$AW(s) = \sum_{i=0,\ldots,n} p_X(s[_i) \otimes p_Y(s]_{n-i}) \tag{2.11}$$

gdzie p_X i p_Y są rzutowaniami na współrzędne.

Przystąpimy teraz do definicji odwzorowania EZ. Wystarczy określić je na dowolnej parze sympleksów, tzn. opisać $EZ(s \otimes t)$, gdzie $s = (s_0, \ldots, s_n) \in X_n$, $t = (t_0, \ldots, t_m) \in Y_m$. $EZ(s \otimes t)$ będzie sumą wszystkich sympleksów postaci $((s_{i_0}, t_{j_0}), (s_{i_1}, t_{j_1}) \ldots, (s_{i_{n+m}}, t_{j_{n+m}}))$ przy czym $0 = i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{n+m} = n$, $0 = j_0 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_{n+m} = m$ i ponadto dla każdego $k = 0, \ldots, n+m-1$ zachodzi $i_{k+1} = i_k$ i $j_{k+1} = j_k + 1$ albo $i_{k+1} = i_k + 1$ i $j_{k+1} = j_k$ a więc jeden z ciągów zwiększa się o jeden, a drugi się nie zmienia. Można udowodnić, że tak określona suma geometrycznie odpowiada triangulacji iloczynu kartezjańskiego sympleksów, a o to nam tak naprawdę chodzi.

Odwzorowanie EZ uogólnia się do tak zwanego odwzorowania:

$$\mathrm{SHUFFLE}_k : N_*X_1 \otimes \ldots \otimes N_*X_k \to N_*(X_1 \times \ldots \times X_k)$$

gdzie mamy do czynienia z więcej niż dwoma sympleksami. Należy wtedy rozpatrywać k ciągów z których na każdym kroku dokładnie jeden zwiększa swoją wartość. Uogólnienie to jest, jak widać, trywialne i można je otrzymać przez składanie odwzorowania EZ.

2.3 Operady, algebry nad operadami

Niech $\mathbb{F}Mod$ będzie kategorią $\mathbb{F}$-modułów (przestrzeni wektorowych) wraz z klasycznym iloczynem tensorowym $\otimes$.

Ciągiem symetrycznym bądź Σ_*-modułem w kategorii $\mathbb{F}Mod$ nazwiemy ciąg $\mathcal{M}(n) \in \mathbb{F}Mod, n \in \mathbb{N}$, gdzie dla każdego $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M}(n)$ jest reprezentacją grupy symetrycznej Σ_n.

Ciąg f_n morfizmów reprezentacji, gdzie $f_n : \mathcal{M}(n) \to \mathcal{N}(n)$ a $\mathcal{M}$ i $\mathcal{N}$ są ciągami symetrycznymi, nazwiemy *morfizmem ciągów symetrycznych.*

Operad w $\mathbb{F}Mod$ to ciąg symetryczny $\mathcal{P}$ w $\mathbb{F}Mod$ wraz z produktem złożenia (złożeniem):

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(i_n) \to \mathcal{P}(i_1 + \ldots + i_n)$$

zdefiniowanym dla każdego $n \geq 1$ oraz $i_1, \ldots, i_n \geq 0$ oraz wyróżnionym elementem $\mathbf{1} \in \mathcal{P}(1)$. Dla $p \in \mathcal{P}(n)$, $q_1 \in \mathcal{P}(i_1) \ldots q_n \in \mathcal{P}(i_n)$ przez $p(q_1, \ldots, q_n)$ oznaczać będziemy obraz $p \otimes q_1 \ldots q_n$ w produkcie złożenia.

Element $\mathbf{1}$ musi spełniać równości

$$\mathbf{1}(p) = p$$

oraz

$$p(\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}) = p$$

dla dowolnego $p \in \mathcal{P}(n)$

Żądamy ponadto, aby złożenie spełniało następujące aksjomaty:

- Aksjomat łączności

$$(O1)\quad p(q_1(r^1_1,\ldots,r^1_{i_1}),q_2(r^2_1,\ldots,r^2_{i_2}),\ldots,q_n(r^n_1,\ldots,r^n_{i_n})) = \\ p(q_1,\ldots,q_n)(r^1_1,\ldots,r^1_{i_1},r^2_1,\ldots,r^2_{i_2},\ldots,r^n_1,\ldots,r^n_{i_n})$$

dla $p \in \mathcal{P}(n)$, $q_1 \in \mathcal{P}(i_1),\ldots,q_n \in \mathcal{P}(i_n)$, $r^k_1 \in \mathcal{P}(j^k_1),\ldots,r^k_{i_k} \in \mathcal{P}(j^k_{i_k})$ dla $k = 1,\ldots,n$

- Aksjomaty ekwiwariantności:

$$(O2a)\qquad p(s_1q_1,\ldots,s_nq_n) = (s_1 \oplus \ldots \oplus s_n)p(q_1,\ldots,q_n)$$

dla $p \in \mathcal{P}(n), q_1 \in \mathcal{P}(i_1),\ldots,q_n \in \mathcal{P}(i_n), s_1 \in \Sigma_{i_1},\ldots,s_n \in \Sigma_{i_n}$

$$(O2b)\qquad (sp)(q_1,\ldots,q_n) = s_*(i_1,\ldots,i_n)p(q_{s(1)},\ldots,q_{s(n)})$$

dla $p \in \mathcal{P}(n), q_1 \in \mathcal{P}(i_1),\ldots,q_n \in \mathcal{P}(i_n), s \in \Sigma_n$

Aksjomaty te są dość złożone. Ich sens jest jasny przy następującej interpretacji. Element $p \in \mathcal{P}(n)$ ma reprezentować (wieloliniową) operację n-argumentową:

$$p = p(x_1,\ldots,x_n)$$

Działanie grupy symetrycznej Σ_n na $\mathcal{P}(n)$ ma odpowiadać permutowaniu zmiennych, a więc dla $s \in \Sigma_n$:

$$s \cdot p = p(x_{s(1)},\ldots,x_{s(n)})$$

Produkt złożenia

$$\mathcal{P}(n) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \ldots \otimes \mathcal{P}(i_n) \to \mathcal{P}(i_1 + \ldots + i_n)$$

odpowiada podstawieniu operacji w miejsce zmiennych $x_1,\ldots,x_n$:

$$p(q_1,\ldots,q_n) = p(q_1(x_1,\ldots,x_{i_1}),q_2(x_{i_1+1},\ldots,x_{i_1+i_2}),\ldots,q_n(x_{i_1+\ldots+i_{n-1}+1},\ldots,x_{i_1+\ldots+i_n}))$$

Wyróżniony element $\mathbf{1} \in \mathcal{P}(1)$ ma odpowiadać identyczności.

W praktyce przy definiowaniu operadu często zdarza się, że produkt złożenia działa w sposób bardzo skomplikowany i jego opis jest pracochłonny. Wystarczy wtedy opisać tzw. *częściowe złożenia* czyli złożenia postaci:

$$p \circ_k q = p(\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1},q,\mathbf{1},\ldots,\mathbf{1})$$

(q jest na k-tym miejscu) a więc podstawienia operacji q na dowolne miejsce w operacji p. Przy pomocy częściowych złożeń możemy uzyskać dowolne złożenie, jednocześnie częściowe złożenia są najczęściej prostsze do opisania.

Funkcję f nazwiemy *morfizmem operadów* $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ jeśli f jest morfizmem ciągów symetrycznych odpowiadających $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ i dodatkowo jest przemienna ze złożeniem tzn.:

$$f(p(q_1, \ldots, q_n)) = f(p)(f(q_1), \ldots, f(q_n)) \tag{2.12}$$

dla dowolnych $p \in \mathcal{M}(n)$, $q_1 \in \mathcal{M}(i_1), \ldots, q_n \in \mathcal{M}(i_n)$.

Podoperad, *włożenie operadów* i *izomorfizm* operadów definiujemy w naturalny sposób.

Uwaga: Zdefiniowaliśmy operad w kategorii $\mathbb{F}$-modułów. W definicji tej wykorzystaliśmy pojęcie iloczynu tensorowego $\mathbb{F}$-modułów. Okazuje się, że można powtórzyć tę definicję w dowolnej kategorii, która jest *symetryczną kategorią monoidalną* (patrz [6]). W definicji takiej kategorii kluczowe jest istnienie funktora dwuargumentowego pełniącego rolę iloczynu tensorowego. W niniejszej pracy będą rozpatrywane operady w kategoriach $\mathbb{F}Mod$ z iloczynem $\otimes$, $dg\mathbb{F}Mod$ z iloczynem $\otimes$ oraz w $\mathcal{S}et$ i $\mathcal{S}$ z odpowiednim produktem kartezjańskim. W dalszym ciągu opisując własności operadów w kategorii $\mathcal{K}$ będziemy używać oznaczenia $\otimes$ na iloczyn tensorowy w tej kategorii. Dodajmy jeszcze, że reprezentacja (pojawiająca się w definicji operadu) w przypadku kategorii $dg\mathbb{F}Mod$ oznacza ciąg reprezentacji zgodny z różniczką.

Uwaga: W definicji ciągu symetrycznego występują reprezentacje grup symetrycznych. Jeśli chcemy zdefiniować ciąg symetryczny w kategorii $dg\mathbb{F}Mod$, $\mathcal{S}$ bądź $\mathcal{S}et$ należy pojęcie reprezentacji zastąpić pojęciem działania.

Algebrą nad operadem $\mathcal{P}$ lub $\mathcal{P}$*-algebrą* nazwiemy dowolny $\mathbb{F}$-moduł A wraz z interpretacją wszystkich elementów $\mathcal{P}$ jako operacji w A. Interpretacja ta ma mieć postać odwzorowania

$$\mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \to A$$

dla każdego $n \geq 0$ zwanego *ewaluacją* bądź *produktem ewaluacji*.

Obraz elementu $p \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n$ przy ewaluacji będziemy oznaczać $p(a_1, \ldots, a_n)$ (dobrze oddaje to intuicyjny sens ewaluacji).

Od ewaluacji wymagamy by była "ekwiwariantna", a więc:

$$(sp)(a_1, \ldots, a_n) = p(a_{s(1)}, \ldots, a_{s(n)}) \tag{E1}$$

oraz zgodna z produktem złożenia operadu $\mathcal{P}$ (możnę tę własność nazwać łącznością):

$$\begin{aligned}\text{(E2)} \quad & p(q_1, \ldots, q_n)(a_1, \ldots, a_{i_1+\ldots+i_n}) = \\ & \qquad p(q_1(a_1, \ldots, a_{i_1}), q_2(a_{i_1+1}, \ldots, a_{i_1+i_2}), q_n(a_{i_1+\ldots+i_{n-1}+1}, \ldots, a_{i_1+\ldots+i_n})\end{aligned}$$

dla dowolnego $p \in \mathcal{P}(n)$, $q_1 \in \mathcal{P}(i_1), \ldots q_n \in \mathcal{P}(i_n)$

Ponadto żądamy aby interpretacją elementu $\mathbf{1} \in \mathcal{P}(1)$ była operacja identyczności, a więc:

$$\mathbf{1}(a) = a$$

Przykład: Spróbujmy skonstruować operad $\mathcal{C}om$ w kategorii $\mathbb{F}Mod$ taki, że $\mathcal{C}om$-algebrami będą przemienne algebry nad $\mathbb{F}$ i tylko one. W takich algebrach jest z dokładnością do stałej jedna operacja n-elementowa - iloczyn n elementów. $\mathcal{C}om(n)$ można więc opisać jako $\mathbb{F}$-moduł generowany przez jednomian n zmiennych:

$$\mathcal{C}om(n) = \mathbb{F}x_1 \dots x_n$$

Reprezentacja grupy symetrycznej Σ_n jest tu trywialna, a składanie jest podstawianiem wielomianu za zmienną.

Przykład: Podobnie można skonstruować operad $\mathcal{A}s$ w kategorii $\mathbb{F}Mod$ odpowiadający klasie algebr łącznych. W algebrach takich jest tyle operacji n-argumentowych, ile permutacji n argumentów (musimy opisywać wolną algebrę łączną, jeśli w konkretnej algebrze istnieją jakieś relacje to trzeba to uwzględnić w definicji odwzorowania ewaluacji). Oczywiście operacjami n-argumentowymi są także kombinacje liniowe powyższych, ale nas interesują generatory. Możemy zdefiniować $\mathcal{A}s(n)$ jako wolny $\mathbb{F}$-moduł generowany przez jednomiany $x_{s(1)} \cdot \ldots \cdot x_{s(n)}$, gdzie s jest dowolną permutacją z Σ_n. Operacja złożenia w $\mathcal{A}s$ polega na podstawianiu wielomianu za zmienną, a działanie grupy symetrycznej Σ_n na $\mathcal{A}s(n)$ na permutowaniu zmiennych.

Przykład: Bardziej skomplikowanym przykładem jest operad $\mathcal{L}ie$ w kategorii $\mathbb{F}Mod$ odpowiadający klasie algebr Liego. Podstawową operacją w algebrach Liego jest tzw. nawias Liego. Korzystając z tożsamości Jacobiego:

$$[[x,y],z] + [[y,z],x] + [[z,x],y] = 0 \tag{2.13}$$

można pokazać, że $\mathbb{F}$-moduł n-argumentowych operacji w wolnej algebrze Liego jest generowany przez $(n-1)!$ jednomianów postaci:

$$[\dots[x_{s(1)}x_{s(2)}]x_{s(3)}]\dots x_{s(n)}] \tag{2.14}$$

gdzie $s \in \Sigma_n$ jest dowolną permutacją taką, że $s(1) = 1$. Złożenie w $\mathcal{L}ie$ polega na podstawieniu wielomianu Liego za zmienną, a następnie zastosowaniu tożsamości (2.13) i doprowadzeniu wyniku do postaci (2.14). Działanie grupy Σ_n na $\mathcal{L}ie(n)$ definiujemy analogicznie.

Każdy z opisanych operadów w kategorii $\mathbb{F}Mod$ można też traktować jako operad w kategorii $dg\mathbb{F}Mod$, co zresztą w dalszym ciągu uczynimy w przypadku operadu $\mathcal{C}om$. Niech $\mathcal{P}$ będzie operadem w kategorii $\mathbb{F}Mod$. Elementy ciągu $\mathcal{P}(n)$ dla $n = 1, \dots$ są $\mathbb{F}$-modułami. Operad $\tilde{\mathcal{P}}$ kategorii $dg\mathbb{F}Mod$ otrzymujemy kładąc $\tilde{\mathcal{P}}(n)_0 = \mathcal{P}$ oraz $\tilde{\mathcal{P}}(n)_i = 0$ dla $i \neq 0$. Łatwo sprawdzić, że produkt złożenia w $\mathcal{P}$ daje produkt złożenia w $\tilde{\mathcal{P}}$. W dalszym ciągu będziemy używać tego samego symbolu dla operadu w $\mathbb{F}Mod$ i odpowiadającego mu operadu w $dg\mathbb{F}Mod$.

Łatwo zauważyć, że istnienie morfizmu operadów $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ zadaje strukturę $\mathcal{M}$-algebry na dowolnej $\mathcal{N}$-algebrze. Ewaluacją w strukturze $\mathcal{M}$ jest złożenie morfizmu f i ewaluacji w strukturze $\mathcal{N}$. Innymi słowy f daje interpretację operacji z $\mathcal{M}$ przy pomocy operacji z $\mathcal{N}$.

Tę metodę definiowania struktury operadu na danym $\mathbb{F}$-module (tj. przy pomocy morfizmu operadów) będziemy wielokrotnie wykorzystywać w dalszych rozważaniach.

3 Definicja operadu $\mathcal{E}$

W tym rozdziale zdefiniujemy operad $\mathcal{E}$, który w dalszym ciągu wykorzystamy do konstrukcji operacji Steenroda. Dla uproszczenia definicja tego operadu jest rozbita na trzy kroki.

3.1 Operad permutacji

Niech $\mathcal{P}(n) = \Sigma_n$. Na $\{\mathcal{P}(n)\}$ wprowadzimy strukturę operadu w kategorii $\mathcal{S}et$. Σ_n działa na $\mathcal{P}(n) = \Sigma_n$ przez składanie permutacji. Operację złożenia w operadzie $\mathcal{P}$ definiujemy wzorem:

$$p(q_1, \ldots, q_n) = (q_1 \oplus \ldots \oplus q_n) \cdot p_*(i_1, \ldots, i_n) \tag{3.1}$$

dla $p \in \Sigma_n$, $q_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, q_n \in \Sigma_{i_n}$. Każda z permutacji q_i permutuje swój blok, a bloki są permutowane przy pomocy p. Operad $\mathcal{P}$ nazywamy *operadem permutacji.*

Aksjomat (O2a) wynika bezpośrednio z definicji (3.1) (oznaczenie jak w definicji):

$$\begin{aligned}
&p(s_1 q_1, \ldots, s_n q_n) = \\
&(s_1 q_1 \oplus \ldots \oplus s_n q_n) \cdot p_*(i_1, \ldots, i_n) = \\
&(s_1 \oplus \ldots \oplus s_n) \cdot (q_1 \oplus \ldots \oplus q_n) \cdot p_*(i_1, \ldots, i_n) = \\
&(s_1 \oplus \ldots \oplus s_n) \cdot p(q_1, \ldots, q_n)
\end{aligned}$$

W dowodzie aksjomatu (O1) potrzebna jest dodatkowo własność (2.4) (oznaczenia jak w aksjomacie (O1), w szczególności $r_l^k \in \Sigma_{j_l^k}$ dla sensownych k, l):

$$\begin{aligned}
&p(q_1(r_1^1, \ldots, r_{i_1}^1), q_2(r_1^2, \ldots, r_{i_2}^2), \ldots, q_n(r_1^n, \ldots, r_{i_n}^n)) = \\
&(q_1(r_1^1, \ldots, r_{i_1}^1) \oplus \ldots \oplus q_n(r_1^n, \ldots, r_{i_n}^n)) \cdot p_*(\sum_{l=1\ldots i_1} j_l^1, \ldots, \sum_{l=1\ldots i_n} j_l^n) = \\
&((r_1^1 \oplus \ldots \oplus r_{i_1}^1) \cdot (q_1)_*(j_1^1, \ldots, j_{i_1}^1) \oplus \ldots \oplus (r_1^n \oplus \ldots \oplus r_{i_n}^n) \cdot (q_n)_*(j_1^n, \ldots, j_{i_n}^n)) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad p_*(\sum j_l^1, \ldots, \sum j_l^n) = \\
&(\bigoplus_{\substack{k=1\ldots n\\ l=1\ldots i_k}} r_l^k) \cdot (\bigoplus_{k=1\ldots n} ((q_k)_*(j_1^k, \ldots, j_{i_k}^k))) \cdot p_*(\sum j_l^1, \ldots, \sum j_l^n) = \\
&(\bigoplus r_l^k) \cdot (\bigoplus_{k=1\ldots n} q_k)_*(j_1^1, \ldots, j_{i_1}^1, \ldots, j_1^n, \ldots, j_{i_n}^n) \cdot p_*(\sum j_l^1, \ldots, \sum j_l^n) = \\
&(\bigoplus r_l^k) \cdot (\bigoplus q_k)_*(j_1^1, \ldots, j_{i_n}^n) \cdot (p_*(i_1, \ldots, i_n))_*(j_1^1, \ldots, j_{i_n}^n) = (\text{z } (2.4)) \\
&(\bigoplus r_l^k) \cdot ((\bigoplus q_k) \cdot p_*(i_1, \ldots, i_n))_*(j_1^1, \ldots, j_{i_n}^n) = \\
&(\bigoplus r_l^k) \cdot (p(q_1, \ldots, q_n)_*(j_1^1, \ldots, j_{i_n}^n)) = \\
&p(q_1, \ldots, q_n)(r_1^1, \ldots, r_{i_1}^1, \ldots, r_1^n, \ldots, r_{i_n}^n)
\end{aligned}$$

W wyrażeniu, które przekształciliśmy korzystając ze wzoru (2.4) wskaźniki j_l^k nie są ustawione tak jak we wspomnianym wzorze. Z definicji permutacji blokowej widać jednak, że w tym przypadku nie ma to znaczenia.

W dowodzie aksjomatu (O2b) dodatkowo potrzebna jest własność (2.5):

$$
\begin{aligned}
&(sp)(q_1, \ldots, q_n) = \\
&(q_1 \oplus \ldots \oplus q_n) \cdot (sp)_*(i_1, \ldots, i_n) = \text{(z (2.4))} \\
&(q_1 \oplus \ldots \oplus q_n) \cdot s_*(i_1, \ldots, i_n) \cdot p_*(i_{s(1)}, \ldots, i_{s(n)}) = \text{ (z (2.5))} \\
&s_*(i_1, \ldots, i_n) \cdot (q_{s(1)} \oplus \ldots \oplus q_{s(n)}) \cdot p_*(i_{s(1)}, \ldots, i_{s(n)}) = \\
&s_*(i_1, \ldots, i_n) \cdot p(q_{s(1)}, \ldots, q_{s(n)})
\end{aligned}
$$

3.2 Operad Barratta-Ecclesa

3.2.1 Przestrzeń klasyfikująca

Przypomnimy teraz standardową konstrukcję zbioru symplicjalnego będącego modelem przestrzeni EG dla dowolnej grupy dyskretnej G. Przez $\mathcal{W}(G)$ oznaczamy zbiór symplicjalny taki, że:

$$\mathcal{W}(G)_n = G \times \ldots \times G \text{ (n+1 razy)}$$

Odwzorowania ścian i degeneracji w $\mathcal{W}(G)$ polegają odpowiednio na omijaniu i powtarzaniu składników, tj:

$$
\begin{aligned}
d_i(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, \hat{g}_i, \ldots, g_n) \\
s_j(g_0, \ldots, g_n) &= (g_0, \ldots, g_j, g_j, \ldots, g_n)
\end{aligned}
$$

Grupa G działa na zbiorze symplicjalnym $\mathcal{W}(G)$ przez składanie:

$$g(g_0, \ldots, g_n) = (gg_0, \ldots, gg_n)$$

3.2.2 Konstrukcja operadu Barratta-Ecclesa

Niech $\mathcal{W}(n) = \mathcal{W}(\Sigma_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. $\mathcal{W}_n$ wraz z działaniem odpowiednich grup Σ_n przez składanie permutacji jest ciągiem symetrycznym w kategorii $\mathcal{S}$. Na ciągu tym wprowadzimy strukturę operadu w $\mathcal{S}$. Operacja złożenia w tym operadzie:

$$\mathcal{W}(n) \times \mathcal{W}(i_1) \times \ldots \times \mathcal{W}(i_n) \to \mathcal{W}(i_1 + \ldots + i_n)$$

pochodzi od operacji złożenia w operadzie permutacji $\mathcal{P}$. Istotny jest tu fakt, że produkt w kategorii zbiorów symplicjalnych działa po współrzędnych i możemy po prostu na każdej współrzędnej zastosować złożenie z $\mathcal{P}$. Aksjomaty (O1) i (O2) dla $\mathcal{W}$ wynikają natychmiast z odpowiednich aksjomatów dla $\mathcal{P}$. Operad $\mathcal{W}$ nazywamy *operadem Barratta-Ecclesa*.

3.3 Operad $\mathcal{E}$

Operad $\mathcal{W}$ pozwala zdefiniować operad $\mathcal{E}$ w kategorii $dg\mathbb{F}Mod$. Niech $\mathcal{E}(n)_* = N_*\mathcal{W}(n)$. Struktura ciągu symetrycznego na $\mathcal{E}$ pochodzi od odpowiedniej struktury na $\mathcal{W}$. Złożenie w $\mathcal{E}$ także pochodzi z $\mathcal{W}$, jego konstrukcja jest jednak nieco subtelniejsza. Musimy określić odwzorowanie:

$$N_*\mathcal{W}(n) \otimes N_*\mathcal{W}(i_1) \otimes \ldots N_*\mathcal{W}(i_n) \to N_*\mathcal{W}(i_1 + \ldots + i_n)$$

W elemencie $s \otimes s_1 \otimes \ldots \otimes s_n \in N_*\mathcal{W}(n) \otimes N_*\mathcal{W}(i_1) \otimes \ldots N_*\mathcal{W}(i_n)$ sympleksy $s, s_1, \ldots s_n$ mogą być różnych wymiarów i nie da się ich złożyć tak jak w $\mathcal{W}$. Można jednak w następujący sposób wykorzystać odwzorowanie SHUFFLE:

$$\begin{aligned} & N_*\mathcal{W}(n) \otimes N_*\mathcal{W}(i_1) \otimes \ldots N_*\mathcal{W}(i_n) \\ & \xrightarrow{\text{SHUFFLE}_{n+1}} N_*(\mathcal{W}(n) \times \mathcal{W}(i_1) \times \ldots \times \mathcal{W}(i_n)) \\ & \xrightarrow{\text{złożenie z } \mathcal{W}} N_*(\mathcal{W}(i_1 + \ldots + i_n)) \end{aligned}$$

Aksjomat ekwiwariantności (O2) dla $\mathcal{E}$ wynika z odpowiedniego aksjomatu dla $\mathcal{W}$. Aksjomat (O1) natomiast wynika łatwo z definicji odwzorowania SHUFFLE.

4 Struktura $\mathcal{E}$-algebry na kompleksie kołańcuchów

W tym rozdziale zdefiniujemy strukturę $\mathcal{E}$-algebry na znormalizowanym kompleksie kołańcuchów zbioru symplicjalnego. Nie jest to rzeczą prostą, wobec czego zrobimy to w kilku krokach. Pierwszym będzie konstrukcja pomocniczego operadu $\mathcal{Z}$, tzw. operadu Eilenberga-Zilbera, który opisuje interesujące nas wieloliniowe działania na kompleksie kołańcuchów. Następnie skonstruujemy morfizm operadów $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$, a więc pokażemy, które działania odpowiadają elementom operadu $\mathcal{E}$. Morfizm ten jest skomplikowany i mało intuicyjny. Aby uczynić konstrukcję bardziej czytelną zdefiniujemy dodatkowy operad $\mathcal{C}$ zwany operadem cięć odcinków, który będzie kombinatorycznym przedstawieniem interesujących nas elementów $\mathcal{Z}$. Właśnie dzięki tej samej, kombinatorycznej naturze operadów $\mathcal{E}$ i $\mathcal{C}$, łatwiej będzie opisać morfizm $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ i złożyć go z oczywistym morfizmem $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$ niż bezpośrednio konstruować morfizm $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$.

4.1 Operad Eilenberga-Zilbera

4.1.1 Morfizmy dg-modułów

Niech V_* i W_* będą dg-modułami (kompleksami łańcuchowymi). Ciąg homomorfizmów $h_n : V_n \to W_{n+k}$ przemienny z różniczką nazwiemy *dg-homomorfizmem stopnia k dg*-modułów (kompleksów łańcuchowych) V_*, W_* albo po prostu *morfizmem* tych modułów.

Przez $\mathrm{Hom}_*(V_*, W_*)$ będziemy oznaczać dg-moduł morfizmów dg-modułów V_*, W_*, tzn. $\mathrm{Hom}_k(V_*, W_*)$ zawiera morfizmy stopnia k. Różniczkę w $\mathrm{Hom}_*(V_*, W_*)$ określamy wzorem:

$$\partial(f) = \partial \circ f + f \circ \partial$$

4.1.2 Definicja operadu $\mathcal{Z}$

Niech $\mathcal{Z}(n)$ będzie dg-modułem dg-homomorfizmów postaci:

$$N_*(X_1 \times \ldots \times X_n) \xrightarrow{f_{X_1,\ldots,X_n}} N_*X_1 \otimes \ldots \otimes N_*X_n$$

naturalnych w $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{S}$. Zdefiniowany wzorem (2.11) morfizm Alexandera-Whitneya jest jednym z elementów $\mathcal{Z}(2)$ (a dokładniej $\mathcal{Z}(2)_0$).

Na $\mathcal{Z}(n)$ istnieje kanoniczne działanie grupy Σ_n. Jeśli $s \in \Sigma_n$, a $f \in \mathcal{Z}(n)$ to $s \cdot f$ jest jedynym morfizmem uzupełniającym następujący diagram przemienny:

$$\begin{array}{ccc} N_*(X_1 \times \ldots \times X_n) & \xrightarrow{(s\cdot f)_{X_1,\ldots,X_n}} & N_*X_1 \otimes \ldots \otimes N_*X_n \\ \simeq \big\downarrow s_* & & \simeq \big\downarrow s_* \\ N_*(X_{s(1)} \times \ldots \times X_{s(n)} & \xrightarrow{f_{X_{s(1)},\ldots,X_{s(n)}}} & N_*X_{s(1)} \otimes \ldots \otimes N_*X_{s(n)} \end{array}$$

Istnieje również kanoniczne odwzorowanie złożenia:

$$\mathcal{Z}(n) \otimes \mathcal{Z}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \mathcal{Z}_{i_n} \to \mathcal{Z}_{i_1+\ldots+i_n}$$

zadane przez składanie homomorfizmów.

$\mathcal{Z}$ jest więc operadem (wszystkie aksjomaty są w trywialny sposób prawdziwe). Operad ten nazywamy *operadem Eilenberga-Zilbera.*

4.1.3 Struktura $\mathcal{Z}$-algebry na kompleksie kołańcuchów

Dowolny element $\mathcal{Z}(n)$ daje koprodukt na N_*X:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}(n) \otimes N_*X &\xrightarrow{\mathrm{Id}\otimes\Delta_*} \mathcal{Z}(n) \otimes N_*(X \times \ldots \times X) \\ &\xrightarrow{\text{ewaluacja}} N_*X \otimes \ldots \otimes N_*X \end{aligned}$$

gdzie $\Delta : X \to X \times \ldots \times X$ jest odwzorowaniem przekątniowym.

Ten koprodukt indukuje produkt na kompleksie dualnym:

$$\mathcal{Z}(n) \otimes (N^*X)^{\otimes n} \to N^*X$$

a więc daje kanoniczną strukturę $\mathcal{Z}$-algebry na N^*X dla dowolnego $X \in \mathcal{S}$.

4.2 Operad cięć odcinków

4.2.1 Morfizm Alexandera-Whitneya i jego uogólnienia

Opiszemy teraz pewien podoperad $\mathcal{Z}$ oraz kombinatorycznie zdefiniujemy izomorficzny z nim operad $\mathcal{C}$.

Niech X będzie zbiorem symplicjalnym, a s jego n-wymiarowym sympleksem. Dla dowolnego morfizmu $a : \mathbf{m} \to \mathbf{n}$ w kategorii Δ $[a]$-*ścianą* s (ozn. $s[a]$) nazywamy m-wymiarowy sympleks $(X(a))(s)$. Morfizm a można traktować jako niemalejący ciąg numerów wierzchołków s i właśnie te wierzchołki występują w $[a]$-ścianie s. Przy tej definicji i-wymiarowa ściana przednia to $[0, \ldots, i]$-ściana, a i-wymiarowa ściana tylna to $[n-i, \ldots, n]$-ściana.

Przypomnijmy teraz definicję odwzorowania AW:

$$AW(s) = \sum_{i=0,\ldots,n} p_X(s[_i) \otimes p_Y(s]_{n-i})$$

gdzie $s \in (X \times Y)_n$. Odwzorowanie AW jest elementem stopnia 0 w $\mathcal{Z}(2)$. Złożenie $k-1$ odwzorowań AW:

$$AW(\mathbf{1}, AW(\mathbf{1}, AW(\mathbf{1}, \ldots, AW)\ldots)$$

daje element stopnia 0 w $\mathcal{Z}(k)$. Można ten element opisać wzorem:

$$AW_k(s) = \sum_{0=i_0\leq\ldots\leq i_k=n} p_{X_1}(s[i_0, \ldots, i_1]) \otimes p_{X_2}(s[i_1, \ldots, i_2]) \otimes \ldots \otimes p_{X_k}(s[i_{k-1}, \ldots, i_k])$$

gdzie $s \in (X_1 \times \ldots \times X_k)_n$ Oczywiście AW_2 jest klasycznym odwzorowaniem AW.

Składnik w $s_1 \otimes \ldots \otimes s_k \in AW_k(s)$ odpowiadający dowolnemu ciągowi $i_0, \ldots, i_k$ ma tę własność, że w ciągu wierzchołków s najpierw występują wierzchołki s_1, potem s_2 itd., wreszcie na końcu wierzchołki s_k. Mówimy, że AW_k jest morfizmem typu $[1, \ldots, k]$, np. AW jest typu $[1, 2]$. Odwzorowanie $f \in \mathcal{Z}(k)$ typu $[k, k-1, \ldots, 1]$ wygląda tak:

$$f(s) = \sum_{0=i_0\leq\ldots\leq i_k=n} p_{X_1}(s[i_{k-1}, \ldots, i_k]) \otimes p_{X_2}(s[i_{k-2}, \ldots, i_{k-1}]) \otimes \ldots \otimes p_{X_k}(s[i_0, \ldots, i_1])$$

a odwzorowanie $g \in \mathcal{Z}(2)$ typu $[2, 1, 2]$ tak:

$$g(s) = \sum_{0=i_0\leq i_1\leq i_2\leq i_3=n} p_{X_1}(s[i_1, \ldots, i_2]) \otimes p_{X_2}(s[i_0, \ldots, i_1, i_2, \ldots, i_3])$$

To drugie odwzorowanie w przeciwieństwie do pierwszego i do wszystkich odwzorowań AW_k jest odwzorowaniem stopnia 1, a nie 0.

Odwzorowaniem typu $[t_1, \ldots, t_d]$, gdzie $t_1, \ldots, t_d \in \{1, \ldots, k\}$ nazwiemy odwzorowanie $AW[t_1, \ldots, t_d] \in \mathcal{Z}(k)$ zdefiniowane następująco:

$$AW[t_1, \ldots, t_d](s) = \sum_{0=i_0\leq\ldots\leq i_d=n} \bigotimes_{j=1}^{k} p_{X_j}(s[\sum_{\{l:t_l=j\}} i_{l-1}, \ldots, i_l]) \tag{4.1}$$

gdzie $s \in (X_1 \times \ldots \times X_k)_n$, a napis $\sum_{\{l:t_l=j\}} i_{l-1}, \ldots, i_l$ oznacza konkatenację ciągów $i_{l-1}, \ldots, i_l$ (w kolejności rosnących l) dla l takich, że $t_l = j$. Zakładamy ponadto, że ciąg $\{t_i\}$ spełnia dwa dodatkowe warunki:

(C1) Każda wartość ze zbioru $\{1, \ldots, k\}$ występuje w $\{t_i\}$ conajmniej raz

(C2) Żadne dwie kolejne wartości w $\{t_i\}$ nie są identyczne

(łatwo zauważyć, że odwzorowania odpowiadające ciągom nie spełniającym tych warunków są zerowe, bo wszystkie łańcuchy w ich obrazach składają się z sympleksów zdegenerowanych). Pozwalamy natomiast, aby liczby w ciągu $\{t_i\}$ powtarzały się. Stopień odwzorowania $AW[t_1, \ldots, t_d]$ jest równy $d - k$. Jest to dokładnie łączna liczba powtórzeń w ciągu $\{t_i\}$.

Odwzorowanie typu $[t_1, \ldots, t_d]$ dla ciągu $\{t_i\}$ spełniającego warunki (C1) i (C2) nazwiemy *AW-morfizmem*. AW-morfizmy tworzą interesujący nas podoperad $\mathcal{Z}$. Łatwo zauważyć, że klasa ta jest zamknięta ze względu na złożenia i działanie grupy permutacji.

4.2.2 Definicja operadu $\mathcal{C}$ i morfizmu $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$

AW-morfizm jest całkowicie wyznaczony przez swój ciąg $\{t_i\}$. Ideą definicji operadu $\mathcal{C}$, którą za chwilę podamy, jest zinterpretowanie struktury operadu $\mathcal{Z}$ ograniczonej do AW-morfizmów całkowicie w terminach ciągów $\{t_i\}$.

$\mathcal{C}(k)$ ma opisywać morfizmy z $\mathcal{Z}(k)$, a więc musi zawierać ciągi złożone z liczb $1, \ldots, k$. Gradacja w $\mathcal{C}(k)$, tak jak w $\mathcal{Z}(k)$ ma odpowiadać stopniowi transformacji. Możemy zatem zdefiniować d-tą gradację $\mathcal{C}(k)$ (ozn. $\mathcal{C}(k)_d$) jako wolny $\mathbb{F}$-moduł generowany przez ciągi postaci $[t_1, \ldots, t_{k+d}]$ gdzie $t_i \in \{1, \ldots, k\}$ dla $i = 1, \ldots, k + d$.

Umawiamy się ponadto, że $[t_1, \ldots, t_{k+d}] \equiv 0$ jeśli elementy ciągu $\{t_i\}$ nie pokrywają całego zbioru $\{1, \ldots, k\}$ albo jeśli $t_i = t_{i+1}$ dla pewnego i. Moglibyśmy równie dobrze powiedzieć, że takie ciągi nie są generatorami $\mathcal{C}(k)$. Ponieważ jednak w rachunkach, które będziemy w dalszym ciągu przeprowadzać, ciągi takie będą się pojawiać i unikanie ich byłoby kłopotliwe, prościej będzie założyć, że są one równe 0. W szczególności $\mathcal{C}(k)_d = 0$ jeśli $d < 0$.

Zastanowimy się teraz jak przy pomocy ciągów z $\mathcal{C}$ opisać strukturę operadu $\mathcal{Z}$. Najłatwiej opisać strukturę ciągu symetrycznego. Grupa Σ_k działa na $\mathcal{C}(k)$ przez ewaluację, tzn.:

$$s \cdot [t_1, \ldots, t_{k+d}] = [s(t_1), \ldots, s(t_{k+d})]$$

gdzie $s \in \Sigma_k$. Łatwo zauważyć, że ta definicja pokrywa się z definicją działania grupy Σ_k na $\mathcal{Z}(k)$.

Spróbujemy teraz ustalić jak wygląda różniczka w dg-module $\mathcal{C}$. Przypomnijmy, że różniczka morfizmu dg-modułów to:

$$\partial f = \partial \circ f + f \circ \partial$$

różniczka w kompleksie $N_*(X)$:

$$\partial(s_0, \ldots, s_n) = \sum_{i=0,\ldots,n} (s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, , s_n) \tag{4.2}$$

a różniczka w $N_*(X_1) \otimes \ldots \otimes N_*(X_k)$ to

$$\partial(t_1 \otimes \ldots \otimes t_k) = \sum_{i=1,\ldots,n} t_1 \otimes \ldots \otimes \partial(t_i) \otimes \ldots \otimes t_k$$

Wypisywanie w tym miejscu formuł opisujących $\partial \circ f$ i $f \circ \partial$ jest bezcelowe. Są one złożone, a wywód prowadzony przy ich pomocy byłby nieczytelny. Spróbujmy zatem przyjrzeć się wyrażeniom definiującym różniczki pamiętając, że pracujemy nad ciałem charakterystyki 2 (wynik jest taki sam także w ogólnym przypadku, ale trzeba wtedy kontrolować znaki, co w naszej sytuacji byłoby dość kłopotliwe).

Niech $s = (s_0, \ldots, s_n) \in (X_1 \times \ldots \times X_k)_n$, a $f \in \mathcal{Z}(k)_d$ niech będzie $[t_1, \ldots, t_{k+d}]$-odwzorowaniem. Wtedy

$$f(\partial(s)) = \sum_{i=0,\ldots,n} f(s_0, \ldots, \hat{s}_i, \ldots, s_n)$$

Niech $u = p_{X_1}(u_1) \otimes \ldots \otimes p_{X_k}(u_k)$ będzie jednym z elementów w $f(\partial(s))$. Jeden z wierzchołków s (a dokładniej - jego rzut), zgodnie z formułą (4.2), nie występuje w u. Niech będzie to wierzchołek s_i. Niech u_j będzie sympleksem, który zawiera wierzchołki(ek) o numerach sąsiadujących z i (zawsze istnieje dokładnie jeden taki sympleks). Zauważmy, że u występuje w $\partial(f(s))$ jako element wyrażenia:

$$\partial(p_{X_1}(u_1) \otimes \ldots p_{X_j}(s[\mathrm{Vert}(u_j) + \{i\}]) \ldots \otimes p_{X_k}(u_k))$$

gdzie $\mathrm{Vert}(u_j)$ to ciąg numerów wierzchołków sympleksu u_j, $\mathrm{Vert}(u_j) + \{i\}$ zawiera dodatkowo numer i wstawiony na odpowiednie miejsce. Łatwo zauważyć, że u występuje w $\partial(f(s))$ tylko w tym jednym miejscu.

Tak więc wszystkie elementy z $f(\partial(s))$ występują także w $\partial(f(s))$ i znoszą się. Pozostają w $\partial(f(s))$ te elementy, w których występują wszystkie wierzchołki, innymi słowy te, w których usunięty został wierzchołek występujący więcej niż raz. Rozważmy element $u = p_{X_1}(u_1) \otimes \ldots \otimes p_{X_k}(u_k)$ wyrażenia $f(s)$ i dowolny element w wyrażenia $\partial(u)$, w którym usunięty został wierzchołek występujący więcej niż raz. Niech i będzie numerem usuniętego wierzchołka, a jego usunięte wystąpienie niech odpowiada w ciągu $[t_1, \ldots, t_{k+d}]$ elementowi t_j. Jeśli elementowi t_j odpowiada w u jeszcze jakiś inny wierzchołek, np. $i-1$, to w występuje nie tylko w $\partial(u)$, ale także w:

$$\partial(p_{X_1}(u_1) \otimes \ldots p_{X_{t_j}}(s[\mathrm{Vert}(u_{t_j}) - \{i\}]) \ldots p_{X_{t_{j+1}}}(s[\mathrm{Vert}(u_{t_{j+1}}) + \{i-1\}]) \ldots \otimes p_{X_k}(u_k))$$

(w tym wyrażeniu bez straty ogólności założyliśmy, że $t_j < t_{j+1}$). Przypadek, w którym elementowi t_j odpowiada nie $i-1$ ale $i+1$ wygląda analogicznie. Nie mogą elementowi

t_j odpowiadać jednocześnie $i-1$ i $i+1$, bo wtedy i występowałby w u tylko raz. Łatwo zauważyć, że w występuje tylko w tych dwu miejscach, a więc wystąpienia te znoszą się. Pozostaje jeszcze jeszcze przypadek, w którym elementowi t_j odpowiada tylko wierzchołek o numerze i i wierzchołek ten występuje w u więcej niż raz. Wtedy w jest elementem $AW[t_1, \ldots, \hat{t}_j, \ldots, t_{k+d}]$. Co więcej, elementy w o tej własności dokładnie odpowiadają elementom w $AW[t_1, \ldots, \hat{t}_j, \ldots, t_{k+d}]$. Otrzymujemy następujący wzór na różniczkę odwzorowania typu AW:

$$\partial(AW[t_1, \ldots, t_{k+d}]) = \sum_{j=1,\ldots,k+d} AW[t_1, \ldots, \hat{t}_j, \ldots, t_{k+d}]$$

i zgodny z nim wzór na różniczkę w $\mathcal{C}$:

$$\partial([t_1, \ldots, t_{k+d}]) = \sum_{j=1,\ldots,k+d} [t_1, \ldots, \hat{t}_j, \ldots, t_{k+d}]$$

W powyższych rozumowaniach mogą się pojawiać wyrażenia zawierające ciągi nie spełniające warunków (C1) i (C2). Odpowiadające tym ciągom morfizmy są zerowe, co jest zgodne z naszą definicją operadu $\mathcal{C}$.

Pozostaje nam zdefiniowanie złożenia w operadzie $\mathcal{C}$. Wystarczy zdefiniować częściowe złożenia. Przy ich pomocy można uzyskać dowolne złożenia. Jeśli więc zdefiniujemy częściowe złożenia w $\mathcal{C}$ na wzór częściowych złożeń z $\mathcal{Z}$, to wszystkie złożenia w $\mathcal{C}$ będą działały analogicznie do odpowiednich złożeń w $\mathcal{Z}$.
Rozważmy częściowe złożenie:

$$\mathcal{C}(k)_d \otimes \mathcal{C}(l)_e \to \mathcal{C}(k+l-1)_{d+e}$$

odpowiadające podstawieniu elementu $\mathcal{C}(l)_e$ na p-tą pozycję elementu $\mathcal{C}(k)_d$. Ustalmy elementy: $t = [t_1, \ldots, t_{k+d}] \in \mathcal{C}(k)_d$ i $u = [u_1, \ldots, u_{l+e}] \in \mathcal{C}(l)_e$. Chcemy znaleźć złożenie $t \circ_p u$. Odpowiada ono złożeniu morfizmów $AW(t) \circ_p AW(u)$, a więc odwzorowaniu:

$$\begin{aligned}
&N_*(X_1 \times \ldots \times X_{k+l-1}) = \\
&N_*(X_1 \times \ldots \times X_{p-1} \times (X_p \times \ldots \times X_{p+l-1}) \times X_{p+l} \times \ldots \times X_{k+l-1}) \xrightarrow{AW[t]} \\
&N_*(X_1) \otimes \ldots \otimes N_*(X_p \times \ldots \times X_{p+l-1}) \otimes \ldots \otimes N_*(X_{k+l-1}) \xrightarrow{\mathbf{1}^{p-1} \otimes AW[u] \otimes \mathbf{1}^{k-p}} \\
&N_*(X_1) \otimes \ldots \otimes N_*(X_{k+l-1})
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Niech

$$s = (s_0, \ldots, s_n) \in (X_1 \times \ldots \times X_{k+l-1})_n$$

i niech

$$w = w_1 \otimes \ldots \otimes w_{p-1} \otimes \hat{w} \otimes w_{p+l} \otimes \ldots \otimes w_{k+l-1}$$

będzie elementem $AW[t](s)$ (jak we wzorze (4.3)). Sympleks $\hat{w}$ jest elementem $X_p \times \ldots \times X_{p+l-1}$, na którym ewaluowane jest odwzorowanie $AW[u]$. Widać, że aby wyznaczyć ciągi należące do złożenia $c = t \circ_p u$, należy w ciągu $\{t_i\}$ zamiast elementów równych p wstawić pewne podciągi składające się z liczb $p, \ldots, p+l-1$ i dodatkowo zwiększyć o $l-1$ elementy $t_i > p$. Co należy wstawić w miejsce elementów równych p? Niech $i_1, \ldots, i_r$ będzie rosnącym ciągiem wszystkich takich i, że $t_i = p$. Zbiór wierzchołków $\hat{w}$ jest wyznaczony przez ciągów wierzchołków s, po jednym ciągu na każdy element t_{i_j}. Te wierzchołki są następnie dzielone (tak jak zwykle oznacza to, że części się zazębiają) między l sympleksów według schematu $[u_1, \ldots, u_{l+e}]$. A więc zamiast elementów t_{i_j} należy wstawiać kolejne części ciągu $[u_1, \ldots, u_{l+e}]$. Spróbujmy opisać c przy pomocy wzoru. Niech $1 = j_0 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_r = l+e$. Ciąg $[u_1, \ldots, u_{l+e}]$ dzielimy na r podciągów $[u_{j_0}, \ldots, u_{j_1}], [u_{j_1}, \ldots, u_{j_2}], \ldots, [u_{j_{r-1}}, \ldots, u_{j_r}]$. Te podciągi podstawiamy zamiast kolejnych wystąpień p, ale wcześniej musimy wszystkie elementy tych podciągów zwiększyć o $p-1$. Tak więc:

$$c = \sum_{1=j_0 \leq \ldots \leq j_r = l+e} [t_1^+, \ldots, t_{i_1-1}^+, u_{j_0}^+, \ldots, u_{j_1}^+, t_{i_1+1}^+, \ldots, t_{i_2-1}^+, u_{j_1}^+, \ldots, u_{j_2}^+, t_{i_2+1}^+, \ldots, \ldots, \ldots, t_{k+d}^+]$$

gdzie

$$t_i^+ = \begin{cases} t_i & \text{jeśli } t_i < p \\ t_i + l - 1 & \text{jeśli } t_i > p \end{cases}$$

oraz

$$u_{j_k}^+ = u_{j_k} + p - 1$$

4.2.3 Diagramy cięć odcinków

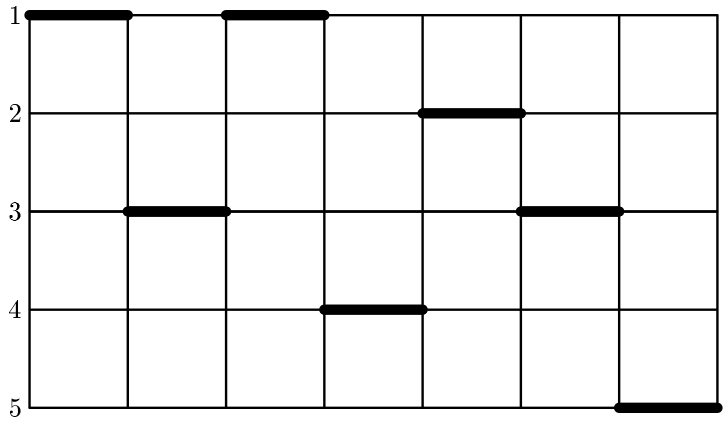
Elementy $\mathcal{C}$ można reprezentować przy pomocy tzw. diagramów cięć odcinków (stąd nazwa operadu). Szczególnie sugestywna jest ilustracja częściowego złożenia w operadzie $\mathcal{C}$.

Diagram cięć odcinków elementu $[t_1, \ldots, t_{k+d}] \in \mathcal{C}(k)_d$ jest zbiorem odcinków łączących punkty kratowe na płaszczyźnie xy. Na osi y (skierowanej w dół) znajdują się liczby $1, \ldots, k$. Na osi x (skierowanej w prawo) liczby $0, 1, \ldots, k+d$. Odcinkami łączymy pary punktów postaci $(i-1, t_i), (i, t_i)$. Rysunek 4.1 ilustruje tę definicję.

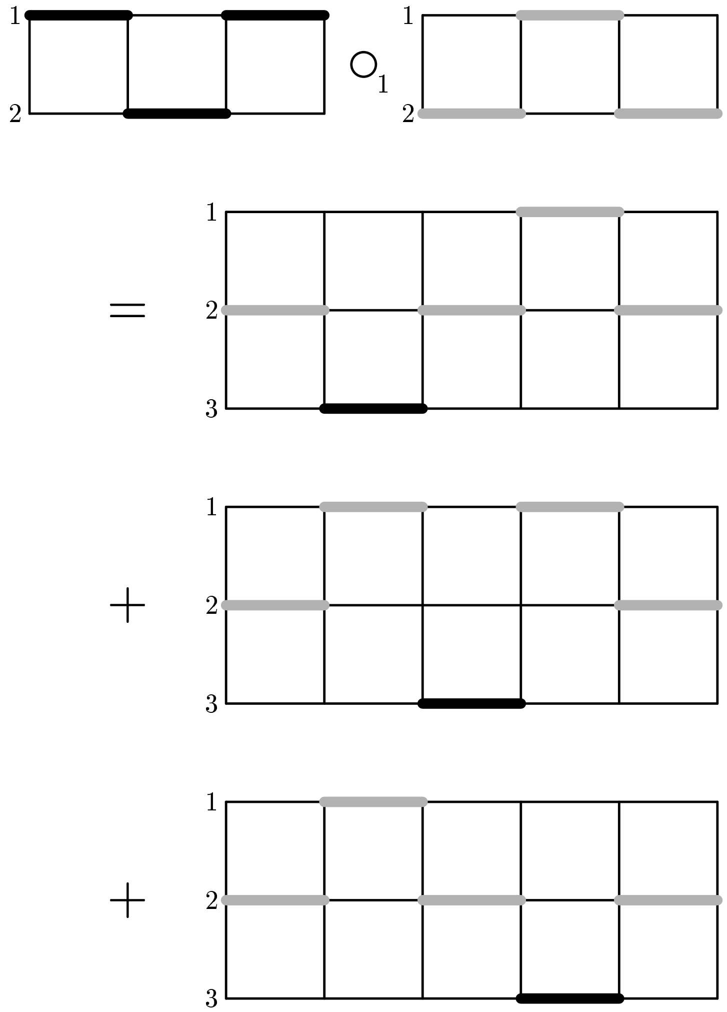
Częściowe złożenie $[t_1, \ldots, t_{k+d}] \circ_p [u_1, \ldots, u_{l+e}]$ jest sumą diagramów otrzymanych przez przecięcie diagramu u na tyle części ile odcinków z $y = p$ znajduje się na diagramie t (cięcia wykonujemy przez środki odcinków) i wklejeniu tych części do diagramu t zamiast odcinków z $y = p$. Przed wklejeniem przedłużamy połówki odcinków do całych odcinków i dodatkowo przesuwamy o $l-1$ w dół odcinki z $y > p$. Rysunek 4.2 ilustruje ten algorytm na prostym przykładzie.

4.2.4 Morfizm $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$

Konstrukcja morfizmu operadów $\mathcal{C} \to \mathcal{Z}$ jest w tym momencie oczywista. Wystarczy skorzystać z formuły (4.1). Dzięki temu, że strukturę operadu na $\mathcal{C}$ konstruowaliśmy przez analogię do struktury operadu na $\mathcal{Z}$ nie musimy teraz niczego dowodzić o tym przekształceniu.



Rysunek 4.1: Diagram reprezentujący ciąg $[1, 3, 1, 4, 2, 3, 5]$



Rysunek 4.2: Diagramy reprezentujące obliczenie $[1, 2, 1] \circ_1 [2, 1, 2]$. Części wynikowych diagramów pochodzące z drugiego składnika zostały zaznaczone innym odcieniem

4.3 Morfizm $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$

4.3.1 Definicja morfizmu

Zdefiniujemy teraz morfizm operadów $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Niech $(s_0, \ldots, s_d) \in \mathcal{E}(k)_d$, tzn. $s_i \in \Sigma_k$. Dla dowolnego ciągu wskaźników $1 \leq k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{d-1} \leq k$ utworzymy przy pomocy permutacji $s_0, \ldots, s_d$ ciąg $[t_1, \ldots, t_{k+d}] \in \mathcal{C}(k)_d$. Ciąg $[t_1, \ldots, t_{k+d}]$ jest opisany formułą:

$$\begin{aligned}
[t_1, \ldots, t_{k+d}] = [&\hat{s}_0(1), \ldots, \hat{s}_0(k_0 - 1), \hat{s}_0(k_0) \\
&\hat{s}_1(k_0), \ldots, \hat{s}_1(k_1 - 1), \hat{s}_1(k_1) \\
&\ldots \\
&\hat{s}_{d-1}(k_{d-2}), \ldots, \hat{s}_{d-1}(k_{d-1} - 1), \hat{s}_{d-1}(k_{d-1}) \\
&\hat{s}_d(k_{d-1}), \ldots, \hat{s}_d(k - 1), \hat{s}_d(k)]
\end{aligned}$$

gdzie $\hat{s}_0, \hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_d$ są permutacjami wyznaczonymi przez $s_0, s_1, \ldots, s_d$.

Konstrukcja permutacji $\hat{s}_0, \hat{s}_1, \ldots, \hat{s}_d$ jest indukcyjna. Na początek ustalamy $\hat{s}_0 = s_0$. Załóżmy, że skonstruowaliśmy permutację $\hat{s}_i$. $\hat{s}_{i+1}$ powstaje z s_{i+1} przez usunięcie elementów $\hat{s}_i(1), \ldots, \hat{s}_i(k_i - 1)$ i wstawienie ich na początek w tej właśnie kolejności. Tym sposobem permutacja $\hat{s}_{i+1}$ pokrywa się z $\hat{s}_i$ na pierwszych $k_i - 1$ pozycjach, a liczby występujące na pozostałych pozycjach są w tej samej kolejności co w s_{i+1}.

Obrazem sympleksu $(s_0, \ldots, s_d)$ jest suma ciągów $[t_1, \ldots, t_{k+d}]$ odpowiadających wszystkim możliwym układom wskaźników $k_0, \ldots, k_{d-1}$.

Opisany morfizm w oczywisty sposób jest niezmienniczy ze względu na działanie grup symetrycznych. To, że zachowuje on złożenia jest jednak trudne do pokazania. Dowód tego faktu będzie można znaleźć w pracy na temat operadu $\mathcal{E}$, nad którą aktualnie pracuje B. Fresse.

4.3.2 Przykład aplikacji morfizmu $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$

Pokażemy jak działa morfizm $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$ na przykładzie sympleksu $(s_0, s_1, s_2) \in \mathcal{E}(4)_2$ gdzie $s_0 = (1, 2, 3, 4)$, $s_1 = (4, 3, 2, 1)$, $s_2 = (1, 2, 3, 4)$. Rozważmy na przykład wskaźniki $k_0 = 2$ i $k_1 = 3$. $\hat{s}_0 = s_0 = (1, 2, 3, 4)$

$\hat{s}_1$ ma się zgadzać z $\hat{s}_0$ na argumentach $1, \ldots, k_0 - 1$ czyli na argumencie 1, a więc

$$\hat{s}_1(1) = \hat{s}_0(1) = 1$$

Pozostałe wartości mają w $\hat{s}_1$ wystąpić w tej kolejności co w s_1. Tak więc:

$$\hat{s}_1 = (1, 4, 3, 2)$$

Analogicznie

$$\hat{s}_2(1) = \hat{s}_1(1) = 1 \text{ i } \hat{s}_2(2) = \hat{s}_1(2) = 4$$

a więc:

$$\hat{s}_2 = (1, 4, 2, 3)$$

Otrzymujemy wobec tego ciąg:

$$[t_1, \ldots, t_6] = [\hat{s}_0(1), \hat{s}_0(2), \hat{s}_1(2), \hat{s}_1(3), \hat{s}_2(3), \hat{s}_2(4)] = [1, 2, 4, 3, 2, 3]$$

Można sprawdzić, że obrazem sympleksu (s_0, s_1, s_2) jest suma:

$$[1,4,1,2,3,4]+[1,4,3,1,2,3]+[1,4,3,2,1,2]+[1,2,4,2,3,4]+[1,2,4,3,2,3]+[1,2,3,4,3,4]$$

5 Operad $\mathcal{E}$ a operacje Steenroda

Klasyczne *operacje Steenroda* (tzw. kwadraty Steenroda) to operacje kohomologiczne:

$$\mathrm{Sq}^i : H^n(X; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+i}(X; \mathbb{Z}_2) \text{ dla } i \geq 0$$

spełniające następujące aksjomaty:

$$\begin{array}{lll} (S1) & \mathrm{Sq}^0 = 1 & \\ (S2) & \deg(x) = i \implies \mathrm{Sq}^i(x) = x^2 & \\ (S3) & \deg(x) < i \implies \mathrm{Sq}^i(x) = 0 & \\ (S4) & \mathrm{Sq}^k(xy) = \sum_{i=0}^{k} \mathrm{Sq}^i(x) \cup \mathrm{Sq}^{k-i}(y) & \text{(Formuła Cartana)} \end{array}$$

Można analogicznie zdefiniować kwadraty Steenroda dla kohomologii relatywnych. Można też zdefiniować operacje Steenroda dla kohomologii o współczynnikach w $\mathbb{Z}_p$. Nasza konstrukcja daje się przeprowadzić w obu tych przypadkach, ale wiąże się to ze żmudnymi rachunkami. Szczególnie w tym drugim przypadku musielibyśmy przeprowadzić od nowa sporą część rozumowań, aby uwzględnić w formułach znaki.

Operacje spełniające powyższe aksjomaty można konstruować na wiele sposobów. W tym rozdziale pokażemy konstrukcję operacji Steenroda przy pomocy operadu $\mathcal{E}$. Będzie ona przebiegać identycznie do klasycznej konstrukcji Steenroda tyle, że przekształcenia potrzebne w konstrukcji będą wskazywane explicite, a nie przy pomocy metody modeli acyklicznych. Ta konstruktywność jest ogromną zaletą, daje bowiem dobrą intuicję operacji Steeroda.

5.1 Struktura algebry przemiennej na dowolnej $\mathcal{E}$-algebrze

Przyłóżmy do operacji ewaluacji dowolnego operadu $\mathcal{P}$ w kategorii *dg*-modułów na $\mathcal{P}$-algebrze A:

$$\mathcal{P}(k) \otimes A^{\otimes k} \to A$$

funktor homologii (w obu stronach przyjmujemy gradację kohomologiczną). Dostajemy odwzorowanie:

$$H^*(\mathcal{P}(k) \otimes A^{\otimes k}) \to H^*(A)$$

Składając je z naturalnym odwzorowaniem:

$$H^*(\mathcal{P}(k)) \otimes H^*(A^{\otimes k}) \to H^*(\mathcal{P}(k) \otimes A^{\otimes k})$$

dostajemy ewaluację $H^*(\mathcal{P}(k))$ na $H^*(A)$. Można łatwo sprawdzić, że struktura operadu na $\mathcal{P}$ indukuje strukturę operadu na $H^*(\mathcal{P})$ oraz, że otrzymana ewaluacja spełnia aksjomaty (E1), (E2).

Tak się składa, że $H^*(\mathcal{E}) = \mathcal{C}om$ (traktowany jako operad w $dg\mathbb{F}Mod$), a więc dostajemy strukturę algebry przemiennej na $H^*(A)$ dla dowolnej $\mathcal{E}$-algebry A. Równość $H^*(\mathcal{E}) = \mathcal{C}om$ wynika ze znanego faktu, że zbiory symplicjalne $\mathcal{W}(n)$ są modelami przestrzeni $EG(\Sigma_n)$, które są ściągalne i w zwiazku z tym $(H^*(\mathcal{E}(n))$ mają zerowe wszystkie gradacje z wyjątkiem zerowej, która równa jest $\mathbb{F}$.

Łatwo sprawdzić, że kołańcuch reprezentujący w gradacji zerowej generator $H^*(\mathcal{E})(2)$ odpowiada "kołańcuchowej" operacji $\cup$, a generatory $H^*(\mathcal{E})(k)$ dla $k > 2$ jej złożeniom. Nie będziemy jednak zajmować tym faktem, a w dalszym ciągu otrzymamy dużo silniejsze rezultaty dotyczące związku operadu $\mathcal{E}$ nie tylko ze strukturą przemienną, ale także z operacjami Steenroda na $H^*(A)$.

5.2 Klasyczne podejście do operacji Steenroda

Ponieważ celem tej pracy nie jest prezentacja klasycznej konstrukcji Steenroda, nie będziemy przeprowadzać pełnego dowodu jej poprawności. Dowód taki można znaleźć np. w [2]. Chodzi nam raczej o zbadanie jakie przekształcenia są potrzebne do konstrukcji kwadratów Steenroda i jakie muszą one spełniać własności.

Niech $T : N_*(X) \otimes N_*(X) \to N_*(X) \otimes N_*(X)$ będzie zamianą składników:

$$T(x \otimes y) = y \otimes x$$

Będziemy definiować indukcyjnie odwzorowania $\Delta_i : N_*(X) \to N_*(X) \otimes N_*(X)$ przy czym odwzorowanie Δ_i będzie stopnia i.

Jako odwzorowanie Δ_0 bierzemy dowolną aproksymację diagonalną, tzn. odwzorowanie $\Delta : N_*(X) \to N_*(X) \otimes N_*(X)$ takie, że $\Delta(x) = x \otimes x$ dla $x \in N_0(X)$. Takim odwzorowaniem jest na przykład złożenie diagonali z odwzorowaniem Alexandera-Whitneya. Δ_0 z reguły nie jest przemienne, tzn. $T \circ \Delta_0$ jest aproksymacją diagonalną inną niż Δ_0. Z metody modeli acyklicznych wynika jednak, że każde dwie aproksymacje diagonalne są naturalnie łańcuchowo homotopijne. Niech Δ_1 będzie łańcuchową homotopią między Δ_0 i $T \circ \Delta_0$:

$$(T + 1) \circ \Delta_0 = T \circ \Delta_0 + \Delta_0 = \partial \circ \Delta_1 + \Delta_1 \circ \partial$$

Okazuje się, że Δ_1 tak jak Δ_0 z reguły nie jest przemienne, ale z metody modeli acyklicznych wynika, że Δ_1 i $T \circ \Delta_1$ są naturalnie łańcuchowo homotopijne. Łańcuchową homotopię między tymi odwzorowaniami oznaczymy Δ_2.

Dalej postępujemy analogicznie. Mając zdefiniowane odwzorowanie Δ_i, metodą modeli acyklicznych konstruujemy odwzorowanie Δ_{i+1} takie, że:

$$(T + 1)\Delta_n = \partial \circ \Delta_{n+1} + \Delta_{n+1} \circ \partial = \partial\Delta_{n+1} \tag{5.1}$$

Odwzorowania Δ_i indukują na kompleksie kołańcuchów $H^*(X)$ odwzorowania h_i:

$$h_i : N^*(X) \otimes N^*(X) \to N^*(X)$$

określone następująco:

$$(h_i(a \otimes b))(c) = (a \otimes b)(\Delta_i(c))$$

gdzie jak zwykle $(a \otimes b)(c_1 \otimes c_2) = a(c_1) \cdot b(c_2)$.

Określamy teraz odwzorowania $\cup_i$ wzorem:

$$x \cup_i y = h_i(x \otimes y)$$

$\cup_0$ indukuje na kohomologiach klasyczny $\cup$-produkt.

Przekształcenie $a \mapsto a \cup_i a$ indukuje naturalny homomorfizm:

$$\mathrm{Sq}_i : H^q(X) \to H^{2q-n}(X)$$

(trzeba tu przede wszystkim pokazać, że po przejściu do homologii odwzorowanie $a \mapsto a \cup_i a$ jest addytywne; to że jest ono dobrze określone jest trywialne)

Możemy teraz zdefiniować operacje Steenroda:

$$\mathrm{Sq}^j = \mathrm{Sq}_{q-j} : H^q(X) \to H^{q+j}(X)$$

U Bredona [2] do definicji operacji Steenroda wykorzystywany jest kompleks singularny CW-kompleksu. Konstrukcja ta jest jednak poprawna także w naszym przypadku. Część formuł dodatkowo się upraszcza przez to, że elementy zdegenerowane są u nas zerowe. Dowód, że tak zdefiniowane operacje spełniają aksjomaty (S1)-(S4) można oczywiście znaleźć w [2], przy czym tylko dowody aksjomatów (S2)-(S4) przenoszą się na nasz przypadek bez większych zmian. Aksjomat (S1) udowodnimy przy pomocy konstrukcji operadowej w 5.3. Można pokazać (znów metodą modeli acyklicznych), że otrzymane operacje Sq^i są niezależne od wyboru odwzorowań Δ_i

5.3 Konstrukcja operacji Steenroda przy pomocy operadu $\mathcal{E}$

Nie będziemy przeprowadzać pełnej konstrukcji operacji Steenroda, a jedynie pokażemy jak w operadzie $\mathcal{E}$ znaleźć elementy odpowiadające przekształceniom Δ_i (i dualnie h_i oraz $\cup_i$).

Niech $\tau \in \Sigma_2$ będzie transpozycją. Rozważmy ciąg elementów $D_n \in \mathcal{E}(2)_n$, gdzie:

$$D_n = (1, \tau, 1, \tau, 1, \dots)$$

Łatwo zauważyć z definicji D_i, że:

$$\partial(D_n) = D_{n-1} + \tau \cdot D_{n-1} \tag{5.2}$$

Zastanówmy się teraz, jaki jest obraz elementu D_i w morfizmie $\mathcal{E} \to \mathcal{C}$. Musimy w tym celu dla każdego ciągu wskaźników $1 \leq k_0 \leq k_1 \leq \ldots \leq k_{n-1} \leq 2$ policzyć odpowiadający mu ciąg i wyniki zsumować.

Rozważmy ciąg, w którym $k_i = 2$ dla pewnego i. Wtedy $\hat{s}_{i+1}$ pokrywa się z $\hat{s}_i$ na pierwszym elemencie (oznaczenia $\hat{s}_i$ jak w definicji morfizmu). Ale ponieważ obie permutacje są dwuelementowe, oznacza to, że $\hat{s}_{i+1} = \hat{s}_i$. W ciągu wynikowym odpowiadającym naszemu ciągowi wskaźników występują po sobie elementy $\hat{s}_i(k_i)$ i $\hat{s}_{i+1}(k_i)$, które są równe i wobec tego ciąg wynikowy jest zerowy.

Pozostaje do rozważenia ciąg wskaźników $k_0 = k_1 = \ldots = k_{n-1} = 1$. W tej sytuacji, konstruując $\hat{s}_{i+1}$ przepisujemy wszystkie wartości z s_{i+1} i żadnych z $\hat{s}_i$. Tak więc $\hat{s}_i = s_i$ dla wszystkich i. Ciąg wynikowy to:

$$[\hat{s}_0(1), \hat{s}_1(1), \hat{s}_2(1), \ldots, \hat{s}_{n-1}(1), \hat{s}_n(1), \hat{s}_n(2)] = [1, 2, 1, 2, \ldots]$$

Oznacza to, że obrazem elementu D_0 w morfizmie $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ jest morfizm Alexandera-Whitneya. Uwzględniając równanie (5.2) widzimy, że obrazy elementów D_i w morfizmie $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ mogą służyć w klasycznej konstrukcji Steenroda jako Δ_i (równanie (5.2) przechodzi na równanie (5.1)). Dalej zauważmy, że konstrukcja odwzorowań $\cup_i$ przy pomocy Δ_i jest dokładnie identyczna z konstrukcją struktury $\mathcal{Z}$-algebry na $N^*(X)$ a to oznacza, że D_i odpowiadają produktom $\cup_i$. Stąd $x \to D_{n-i}(x, x)$ (gdzie $x \in N^n(X)$) indukuje na kohomologiach X operację Sq^i zgodnie z klasyczną konstrukcją.

W poprzednim rozdziale wspomnieliśmy, że dowód aksjomatu (S1) z [2] nie przenosi się na nasz przypadek. Definicja operadowa pozwala jednak na inny, prosty dowód. Chcemy pokazać, że:

$$\mathrm{Sq}^0 = 1$$

Zauważmy, że $\mathrm{Sq}^0(c^n)$, gdzie $c^n \in N^n(X)$ jest reprezentowany na poziomie kołańcuchów przez:

$$d^n = D_n(c^n, c^n)$$

Z definicji morfizmu $\mathcal{E} \to \mathcal{Z}$ i działania $\mathcal{Z}$ na kompleksie kołańcuchów dostajemy:

$$d^n(s^n) = (c^n \otimes c^n)(AW[1, 2, \ldots](s^n))$$

gdzie $AW[1, 2, \ldots] \in \mathcal{Z}(2)_n$. Z definicji (4.1) mamy:

$$AW[1, 2, \ldots](s^n) = \sum_{0=i_0 \leq \ldots \leq i_n = n} \bigotimes_{j=1}^{2} p_{X_j}(s[\sum_{\{l:t_l=j\}} i_{l-1}, \ldots, i_l])$$

gdzie $[t_1, \ldots, t_{n+2}] = [1, 2, \ldots]$. Zauważmy jednak, że dla transformacji z $\mathcal{Z}(2)$ ciągi $i_0, \ldots, i_n$, w których dwa kolejne elementy są równe, prowadzą do sympleksów zdegenerowanych. Jedyny ciąg w którym wszystkie elementy są różne to $i_0 = 0, i_1 = 1, \ldots, i_n = n$. Stąd:

$$AW[1, 2, \ldots](s^n) = s^n \otimes s^n$$

i:

$$d^n(s^n) = (c^n \otimes c^n)(s^n \otimes s^n) = c^n(s^n) \cdot c^n(s^n) = c^n(s^n)$$

bo pracujemy nad ciałem charakterystyki 2.

5.4 Operacje Steenroda na dowolnej $\mathcal{E}$-algebrze

Narzuca się pytanie, co daje powyższa konstrukcja dla dowolnej $\mathcal{E}$-algebry R (tzn. niekoniecznie algebry postaci $N_*(X)$). Okazuje się, że skonstruowane w ten sposób operacje spełniają aksjomaty (S2)-(S4), nie spełniają tylko (S1) (najtrudniej jest oczywiście wykazać aksjomat (S4)). Ponadto operacje Sq^i dla $i < 0$ nie są zerowe.

6 Podsumowanie

Operad jest w pewnym sensie uniwersalną strukturą. W sytuacjach, w których operacje nie spełniają upraszczających własności (np. nie są przemienne), podejście operadowe jest silnym narzędziem, pozwalającym na bardzo dokładny opis badanej struktury. W tej pracy opisaliśmy przy pomocy operadu $\mathcal{E}$ strukturę wyznaczoną przez operację $\cup$-produktu w kohomologiach oraz wynikające z niej operacje Steenroda.

Bibliografia

[1] M. Barratt,P. Eccles, On Γ_+ structures. I. A free group functor for stable homotopy theory, *Topology* **13** (1974), 25-45

[2] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Text in Mathematics **139**, Springer Verlag (1993)

[3] Dwyer, W. G., *Classifying Spaces and Homology Decompositions*, http://www.nd.edu/~wgd/Dvi/Classifying.Spaces.Homology.Decompositions.dvi

[4] M. Mandell, E_∞ algebras and p-adic homotopy theory, *Topology* **40** (2001), 43-94

[5] P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, Lecture Notes in Mathematics **271**, Springer-Verlag (1972)

[6] S. Shnider, J. Stasheff, M. Markl *Operads in Algebra, Topology and Physics*, preprint uzyskany od autora

[7] N. Steenrod, Products of cocycles and extensions of mappings, *Ann. of Math.* **48** (1947), 290-320